OMO
Die Osnabrücker Mathematik-Olympiade (2016 – 2023)

Reinhardt Fulge (Hrsg.)

Inhalt

Vorwort 5

1 Historische Bemerkungen 6

1.1 Wie alles begann 6

1.2 Wie es weiterging 7

1.3 Nach 20 Jahren – Fortsetzung folgt 8

1.4 Protokoll 9

2 Die Sieger 13

2.1 OMO-Wettbewerb 2016 13

2.2 OMO-Wettbewerb 2017 14

2.3 OMO-Wettbewerb 2018 14

2.4 OMO-Wettbewerb 2019 15

2.5 OMO-Wettbewerb 2022 16

2.6 OMO-Wettbewerb 2023 16

3 Die Aufgaben 18

3.1 OMO 2016 – Gymnasium Bersenbrück 18

3.1.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 18
3.1.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 20
3.1.3 Klassenstufen 5 bis 6 21

3.2 OMO 2017 – Gymnasium Bad Essen 25

3.2.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 25
3.2.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 29
3.2.3 Klassenstufen 5 bis 6 32

3.3 OMO 2018 – Greselius Gymnasium 35

3.3.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 35
3.3.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 37
3.3.3 Klassenstufen 5 bis 6 39

3.4 OMO 2019 –Gymnasium Bad Iburg 43

3.4.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 43
3.4.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 45
3.4.3 Klassenstufen 5 bis 6 47

3.5 OMO 2022 – Ratsgymnasium Osnabrück 51

3.5.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 51
3.5.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 53
3.5.3 Klassenstufen 5 bis 6 54

3.6 OMO 2023 – Angelaschule Osnabrück 57

3.6.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 57
3.6.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 59
3.6.3 Klassenstufen 5 bis 6 61

4 Die Lösungen 65

4.1 OMO 2016 – Gymnasium Bersenbrück 65

4.1.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 65
4.1.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 68
4.1.3 Klassenstufen 5 bis 6 69

4.2 OMO 2017 – Gymnasium Bad Essen 72

4.2.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 72
4.2.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 79
4.2.3 Klassenstufen 5 bis 6 81

4.3 OMO 2018 – Greselius Gymnasium 85

4.3.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 85
4.3.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 90
4.3.3 Klassenstufen 5 bis 6 93

4.4 OMO 2019 – Gymnasium Bad Iburg 101

4.4.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 101
4.4.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 106
4.4.3 Klassenstufen 5 bis 6 108

4.5 OMO 2022 – Ratsgymnasium Osnabrück 111

4.5.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 111
4.5.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 113
4.5.3 Klassenstufen 5 bis 6 115

4.6 OMO 2023 – – Angelaschule Osnabrück 117

4.6.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 117
4.6.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 120
4.6.3 Klassenstufen 5 bis 6 124

Index 128

Vorwort

Diese Chronik der Osnabrücker Mathematik-Olympiade (OMO) soll eine zweifache Aufgabe erfüllen, zum einen soll sie die Preisträger festhalten, zum anderen soll sie das vielfältige Aufgabenmaterial zugänglich machen, das die verschiedenen Ausrichter im Laufe der Zeit zusammengetragen haben.

Ich danke allen Kolleginnen und Kollegen, die bei der Zusammenstellung der Fakten oder durch Überlassung ihres Aufgabenmaterials an dieser Dokumentation mitgewirkt haben.

Mein besonderer Dank gilt dem Kollegen Lothar Melching. Er hat die Osnabrücker Mathematik-Olympiade von ihrem Beginn 1996 an zwanzig Jahre mit einer Chronik begleitet. Von der 21. Olympiade 2016 ab habe ich nun diese Aufgabe übernommen.

Um den historischen Werdegang der OMO auch mithilfe dieses zweiten Teils der Chronik nachvollziehen zu können, habe ich die Kapitel 1.1, 1.2 und 1.4 unverändert vom Kollegen Melching übernommen

Soweit nicht bereits von den Autoren vorgenommen, habe ich weiterhin den Aufgaben ein Stichwort beigefügt, anhand dessen diese im Index gesucht werden können.

Sowohl der erste wie auch der zweite Teil der Chronik sind auch im Internet nachzulesen unter:

http://www.sfz-os.de/index.php/veranstaltungen/mathematik-olympiade/omo-historie

Osnabrück, im Juni 2016
Reinhardt Fulge

1 Historische Bemerkungen

1.1 Wie alles begann

Am Ratsgymnasium in Osnabrück bestand schon seit einer Reihe von Jahren ein schulinterner Mathematikwettbewerb unter dem Namen RAMA (RAtsgymnasium MAthematikwettbewerb).
Dieser Wettbewerb richtete sich an die Mittelstufenschüler und legte diesen auf die jeweilige Klassenstufe abgestimmte Aufgaben zur individuellen schriftlichen Bearbeitung vor.
Nachdem dieser Wettbewerb sich im Laufe der Zeit erfolgreich etabliert hatte, regte der Kollege Reinhardt Fulge vom Ratsgymnasium einen erweiterten Wettbewerb für alle Gymnasien und Gesamtschulen aus der Stadt und dem Landkreis Osnabrück an. Er lud deshalb alle diese Schulen im Jahre 1995 zu einer Vorbesprechung ein, um seine Idee vorzutragen.
Die Idee wurde gerne aufgegriffen. Man einigte sich darauf, diesem Mathematikwettbewerb den Namen OMO (Osnabrücker Mathematik-Olympiade) zu geben und ihn in der folgenden
Weise durchzuführen:

- Die Teilnehmer sind Schulmannschaften und nicht einzelne Schüler.
- Jede Mannschaft besteht aus vier Teilnehmern.
- Die Mannschaften sollen altersmäßig gemischt sein, der Idealfall ist je eine Schülerin/ein Schüler aus den Klassen 7 bis 10.
- Die Teilnehmer ein und derselben Mannschaft bearbeiten die vorgelegten Aufgaben stets gemeinsam.
- Zunächst werden ihnen vier Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung vorgelegt.
- Für die schriftliche Bearbeitung bekommen sie 90 Minuten Zeit.
- Die vier besten Mannschaften aus diesem schriftlichen Wettbewerbsteil kommen in die Endausscheidung.
- In der Endausscheidung werden den verbleibenden Mannschaften zwei neue Aufgaben vorgelegt.

- Die Lösungen dazu sind gemeinsam zu erarbeiten und anschließend mündlich vorzutragen.
- Die Bewertung dieses Wettbewerbsteiles berücksichtigt auch die Art des Vortrags und das gemeinsame Auftreten der Mannschaft.
- Der Wettbewerb soll reihum von den beteiligten Schulen ausgerichtet werden.

Lothar Melching

1.2 Wie es weiterging

Bei den ersten Mathematik-Olympiaden nahmen immerhin schon ein Dutzend Mannschaften teil. Im Laufe der Zeit vergrößerte sich die Teilnehmerzahl, weil einerseits zunächst außenstehende Schulen hinzukamen und andererseits Schulen auch mit mehreren Mannschaften antraten.
In den ersten Jahren trafen sich die betreuenden Lehrer nach jedem Wettbewerb zu einem Erfahrungsaustausch. Nach den Erfahrungen wurden auch die Wettbewerbsbedingungen fortentwickelt.
Ein Ergebnis dieser Zusammenkünfte ist das im Abschnitt 1.4 wiedergegebene Protokoll.
Für die Bewertung der schriftlichen Aufgaben waren von Anfang an je 10 Punkte vorgesehen. Damit die mündliche Runde dasselbe Gewicht erhielt, vergab man hier für jede Aufgabe zunächst bis zu 20 Punkte. Im Laufe der Zeit reduzierte man deren Gewicht auf 10 Punkte je Aufgabe. Damit Schülerinnen und Schüler der 7. Klassen sich produktiv beteiligen können, sollten immer auch Aufgaben dabei sein, die auf Vorkenntnisse aus den höheren Klassen verzichten.
Im Jahre 2004 erhielten die Gymnasien nach Auflösung der Orientierungsstufe in Niedersachsen die 5. und 6. Klassen zurück.
Diese sollten fortan in die Osnabrücker Mathematik-Olympiade einbezogen werden. Da es untunlich erschien, die Mannschaften zu vergrößern, und man auch den großen Altersunterschied zwischen Zehntklässlern und Fünftklässlern als problematisch ansah, beschloss man, für die 5. und 6. Klassen einen eigenen Wettbewerb im Rahmen der OMO auszurichten.

Das Gymnasium in Bad Essen hat sich dieser Aufgabe als erstes unterzogen und sie mit Bravour gemeistert. Im Rahmen des Wettkampfs der 5. und 6. Klassen ist es üblich geworden, dass die erste Runde als schriftliche Runde in derselben Form wie bei den 7. bis 10. Klassen erfolgt, die zweite Runde aber als sportlicher Mannschaftwettbewerb durchgeführt wird.
Von Anfang an sollte den Wettbewerbsteilnehmern ein echter Anreiz geschaffen werden. Stets erhielten alle Teilnehmer eine schöne Urkunde, die vier siegreichen Mannschaften darüber hinaus Preise in Form von Büchergutscheinen und die erstplatzierte Mannschaft einen Wanderpokal. Die Büchergutscheine hatten von Beginn an einen erheblichen Wert.
Anfangs erhielt jedes Mitglied der viertbesten Mannschaft 25,- DM. Das steigerte sich für die davorliegenden über 50,- DM, 75,- DM bis auf 100,- DM.
Diese finanzielle Leistung war nur möglich, weil uns der Buchhandel in diesem Unternehmen sehr gut unterstützt hat, ebenso auch die Fördervereine der ausrichtenden Schulen. Besonders hervorgetan durch ihr finanzielles Engagement hat sich über die Jahre hinweg die Buchhandlung Jonscher aus Osnabrück. Allen Spendern und Förderern sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Lothar Melching

1.3 Nach 20 Jahren – Fortsetzung folgt

Auch nach 20 Jahren kann der oben dargelegte Austragungsmodus noch als bewährt angesehen werden. Als Beleg dafür kann die inzwischen zunehmend gestiegene Zahl der teilnehmenden Schulen angesehen werden. Nachdem sich bei der OMO 2014 die Zahl der teilnehmenden Schulen schon auf 13 mit 148 Teilnehmern erhöht hatte, waren es bei der Olympiade 2015 bzw. 2016 dann 15 Schulen mit 172 bzw. 168 teilnehmenden Schülerinnen und Schülern.
Die im Protokoll von 2012 (Kapitel 1.4) erwähnte Veröffentlichung der RAMA-Aufgaben findet inzwischen nicht mehr statt, da viele Schulen inzwischen eigene Wettbewerbe durchführen.

Allerdings wurde es für die jeweils ausrichtenden Schulen zunehmend problematisch Sponsoren für die Gesamtkosten von Preisen, Material und Catering zu gewinnen, da zu der hohen Schülerzahl auch in jedem Jahr eine nennenswerte Zahl von zu verköstigenden Begleitern sowie die zunehmend hohe Zahl von Helfern in der ausrichtenden Schule kam.
Erfreulicherweise konnte erstmals für die Olympiade 2014 ein Gesamtsponsor gefunden werden. Die Stiftung der Sparkassen des Osnabrücker Landes hat eine Unterstützung der OMO mit jeweils 1500 € vorerst bis zum Jahr 2017 zugesagt. Dafür sagen wir ganz herzlichen Dank.
Des Weiteren ist es zwischenzeitlich gelungen, die OMO auch institutionell stärker zu verankern. Seit der Olympiade 2016 ist die OMO mit dem Schüler-Forschungs-Zentrum (SFZ) Osnabrück verbunden. Daraus ist inzwischen auch ein Web-Auftritt der OMO erwachsen (http://www.sfz-os.de/index.php/veranstaltungen/mathematik-olympiade), wo man Aktuelles und vor allem die Chronik findet.
Bedauerlicherweise musste in den Jahren 2020 und 2021 wegen der Corona-Pandemie die Tradition der jährlichen Austragung unterbrochen werden, bevor im Jahr 2022 endlich das 25-jährige Jubiläum der Olympiade ausgetragen werden konnte.

Reinhardt Fulge

1.4 Protokoll

Osnabrücker Mathematik-Olympiade (OMO)
(in der Fassung vom 16.12.2002)

Träger der Olympiade

Träger der Olympiade ist der „Arbeitskreis Mathematik der Osnabrücker Region“ (AMOR). Dieser versteht sich als lockerer Zusammenschluss einer Interessengruppe von Mathematikerinnen und Mathematikern aus den Fachgruppen der beteiligten Schulen.

Durchführungsmodus

I Termine und Ausrichter

Die Olympiade findet jedes Jahr einmal im zweiten Halbjahr des Schuljahres statt. Eingeladen werden die Gymnasien und Gesamtschulen der Osnabrücker Region.
Der jeweilige Ausrichter organisiert die Veranstaltungsplanung. Er ist zuständig für die Erstellung und Korrektur der Aufgaben und für die Durchführung der eigentlichen Veranstaltung.
Nach der Ausrichtung der ersten Olympiade 1996 durch das Ratsgymnasium wurde in den Folgejahren die Olympiade von folgenden Schulen ausgerichtet: Ursulaschule, Graf-Stauffenberg-Gymnasium, Gymnasium Melle, Gymnasium Oesede, Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium, Gymnasium „In der Wüste“.
Die Anzahl der teilnehmenden Gymnasien aus Osnabrück und Umgebung beträgt seit der erstmaligen Durchführung etwa 8 bis 10. Da mehrere Gymnasien wiederholt auch mit zwei oder drei Mannschaften teilgenommen haben, ergibt sich eine gleichbleibende Beteiligung von etwa 12 bis 15 Teams.

II Vorbereitung

Im ersten Halbjahr des Schuljahres erfolgt eine offizielle Einladung der beteiligten Schulen durch den Veranstalter. Nach den Herbstferien werden die Aufgabenvorschläge aus dem Mathematikwettbewerb des Ratsgymnasiums (RAMA) auf der Homepage des Ratsgymnasiums ins Internet gestellt und können von den einzelnen Schulen nach eigenem Ermessen in einer Art Vorrunde verwendet werden.
Die zugehörigen Lösungen werden erst nach Abschluss des Mathematikwettbewerbs des Ratsgymnasiums zu Beginn des zweiten Halbjahres ins Internet gesetzt.
Die Schulen stellen Teams von vier Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I zusammen. Eine Schule kann mit bis zu drei Teams an der Olympiade teilnehmen.

III Durchführung

Am Veranstaltungstag erhält jedes Team in der **ersten Runde** vier Aufgaben, die es unter Klausurbedingungen innerhalb von 90 Minuten als Gesamtteam schriftlich bearbeitet. Mindestens zwei der Aufgaben sollen mit den unterrichtlichen Voraussetzungen der 7. Klasse lösbar sein.
Eine Korrekturgruppe des Ausrichters bewertet die Lösungen der einzelnen Teams und ermittelt die vier oder fünf besten Teams, die sich für die folgende Runde qualifiziert haben.
Die **zweite Runde** findet vor Publikum statt. Die Teams erhalten nacheinander jeweils zwei Aufgaben, die sie 15 Minuten lang bearbeiten und deren Lösung sie anschließend 10 Minuten lang vortragen dürfen. Gefordert sind hier vor allem Lösungsstrukturen und deren mündliche Wiedergabe sowie Teamarbeit.
Der Ablauf erfolgt in der Weise, dass während des Vortrags eines Teams das jeweils nächste Team die Aufgaben bearbeitet. Die Bewertung jedes Teams durch die Jury erfolgt unmittelbar nach dem Vortrag. Die Siegerteams werden anhand der Ergebnisse der ersten und zweiten Runde ermittelt. In die Gesamtwertung geht jede der vier schriftlichen und der zwei mündlichen Aufgaben mit gleichem Gewicht ein. Die Siegerehrung findet anschließend statt.

IV Prämierung

Das Siegerteam erhält einen Wanderpokal. Die besten Teams erhalten Buchschecks, die zu gleichen Teilen unter den Schülerinnen und Schülern eines Teams aufzuteilen sind. Alle Teilnehmer erhalten eine Urkunde.
Die großzügige Preisgestaltung ist möglich, da es dem Arbeitskreis bisher in jedem Jahr gelungen ist, Buchhändler aus der Region Osnabrück als Sponsoren zu gewinnen.

2 Die Sieger

2.1 OMO-Wettbewerb 2016

Ausrichter Gymnasium Bersenbrück

Altersstufe 7. bis 10. Klasse

1. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team A II
(Svenja Debbrecht, Paul Ollermann, Yannik Schmidt, Jamila-Lia Fey Usselmann)
2. Ursulaschule Osnabrück, Team A I
3. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team A I
4. Ursulaschule Osnabrück, Team A II

Altersstufe 5. und 6. Klasse

1. Gymnasium Bersenbrück Team B
(Naoko Wengh, Matthias Stelzle, Julius Wehlage, Hanna Klein Helmkamp)
2. Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Team B1
3. Ursulaschule Osnabrück Team B
4. Gymnasium Bad Iburg Team B

2.2 OMO-Wettbewerb 2017

Ausrichter Gymnasium Bad Essen

Altersstufe 7. bis 10. Klasse

1. Gymnasium Carolinum Osnabrück, Team A II
(Tobias Goltermann, Moritz Huß, Lars Reitzner und Thomas Nortmann)
2. Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück, Team A
3. Ursulaschule Osnabrück, Team A II
4. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team A I

Altersstufe 5. und 6. Klasse

1. Gymnasium Bersenbrück B II
(Moritz Esch, Jella Haskamp, Daniel Robbe, Yumi Wengh)
2. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team B
3. Gymnasium Melle Team B
4. Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück Team B

2.3 OMO-Wettbewerb 2018

Ausrichter Greselius-Gymnasium Bramsche

Altersstufe 7. bis 10. Klasse

1. Gymnasium Carolinum Osnabrück, Team A I
(Tobias Goltermann, Moritz Huß, Lars Jesper Reitzner und Felix Hune)
2. Gymnasium Melle, Team A I
3. Greselius-Gymnasium Bramsche, Team A I
4. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team A II

Altersstufe 5. und 6. Klasse

1. Gymnasium Bersenbrück B
(Jonathan Brüggemann Moritz Esch, Niklas Reinermann Jella Haskamp)
2. Gymnasium Carolinum, Team B
3. Ratsgymnasium Osnabrück Team B
4. Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück Team B I

2.4 OMO-Wettbewerb 2019

Ausrichter Gymnasium Bad Iburg

Altersstufe 7. bis 10. Klasse

1. Ratsgymnasium Team A1
(Fenja Krebs, Leo Papenhausen, Jan-Ole Egbers)
2. Platz Graf-Stauffenberg-Gymnasium Team A1
3. Gymnasium Bad Iburg, Team A I
4. Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück

Altersstufe 5. und 6. Klasse

1. Graf-Stauffenberg-Gymnasium B1
(Johanna Osterfeld, Christina Osterfeld, Katharina Westpfahl, Lana Doetsch)
2. Gymnasium Bad Essen, Team B1
3. Ursulaschule
4. Gymnasium Bersenbrück

2.5 OMO-Wettbewerb 2022

Ausrichter Ratsgymnasium Osnabrück

Altersstufe 7. bis 10. Klasse

1. Gymnasium Carolinum, Team „CaroMa2“
(Tom Möller, Tobias Diening, Jannis Boes, Manuel Kamps)
2. Greselius-Gymnasium Bramsche, Team „TOLL“
3. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team „ganz große Wüstenpinguine“
4. Ursulaschule, Team „Ursulaschule 2“

Altersstufe 5. und 6. Klasse

1. Ratsgymnasium, Team „ The Terrific Ts and friend”
(Teresa Wieczoreck, Theo Lee, Tobias Klezath, Gabriel Tjuri)
2. Gymnasium Melle, Team „Die Jungmathematiker Melle
3. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team “Wüstenkängurus“
4. Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück Team “Falken“

2.6 OMO-Wettbewerb 2023

Ausrichter Angelaschule Osnabrück

Altersstufe 7. bis 10. Klasse

1. Ratsgymnasium Osnabrück, Team “Ratzia“
(Sarah Menke, Felix Wessels, Felix Werries, Jonas Kunis)
2. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team „Wüstenpageien“
3. Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück, Team „Adler“
4. IGS Osnabrück, Team „IGS Osnabrück 1“

Altersstufe 5. und 6. Klasse

1. Angelaschule Osnabrück, Team Knobelkekse”
(Clara Greve, Fiete Raude, Niklas Menke, Paul Schröder)
2. Artland-Gymnasium Quakenbrück, Team „Artland-Gymnasium 1“
3. Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück, Team “Die EMAthleten“
4. Gymnasium Bersenbrück, Team “Gymnasium Bersenbrück 2“

3 Die Aufgaben

3.1 OMO 2016 – Gymnasium Bersenbrück

3.1.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Bitte nicht durch drei...)

a) Jemand bildet aus zwei positiven ganzen Zahlen die Summe, die Differenz und das Produkt.
Untersucht, ob es vorkommen kann, dass keines dieser drei Ergebnisse durch 3 teilbar ist.

b) Jemand bildet aus drei positiven ganzen Zahlen, für die $a \geq b \geq c$ gilt, die Summe $a + b + c$ und die Differenzen
$a - b$, $b - c$, $a - c$.
Untersucht, ob es vorkommen kann, dass keines dieser vier Ergebnisse durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 2 (Chips)

Wir betrachten ein Spiel aus 50 gelben und 50 roten Chips. Eine bestimmte Anzahl von solchen Chips soll derart in eine Reihe aneinandergelegt werden, dass nie zwei rote Chips aneinander liegen. Zwei oder mehr gelbe Chips dürfen jedoch aneinander liegen.
Zwei Reihen werden dabei genau dann als gleich betrachtet, wenn die Chips an gleicher Position die gleiche Farbe haben.

a) Ermittelt die Anzahl aller Möglichkeiten, eine solche Reihe mit 4 Chips zu legen.
b) Ermittelt die Anzahl aller Möglichkeiten, eine solche Reihe mit 5 Chips zu legen.
c) Ermittelt die Anzahl aller Möglichkeiten, eine solche Reihe mit 10 Chips zu legen.

Aufgabe 3 (Summe 105)

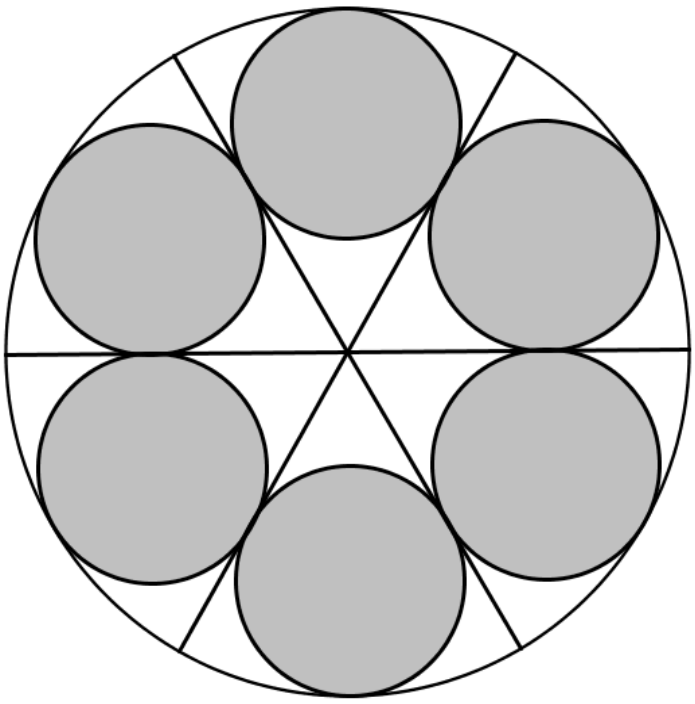
Auf wie viele verschiedene Arten lässt sich die Zahl 105 als Summe von zwei oder mehr aufeinander folgenden natürlichen Zahlen darstellen?
Nennt die möglichen Summen und begründet, warum es keine weiteren Lösungen geben kann.

Aufgabe 4 (Der große Kreis und die 6 kleinen)

Nimm einen Kreis mit Radius R und teile ihn durch drei Durchmesser in sechs gleiche Teile. In jeden der Teile zeichne einen kleinen einbeschriebenen Kreis mit Radius r, der sowohl den großen Kreis, wie auch die eingezeichneten Durchmesser berührt (siehe Abbildung 3.1).

a) Beweise, dass $r = \frac{R}{3}$ gilt. (Hinweis: Es ist $\sin(30°) = \frac{1}{2}$.)

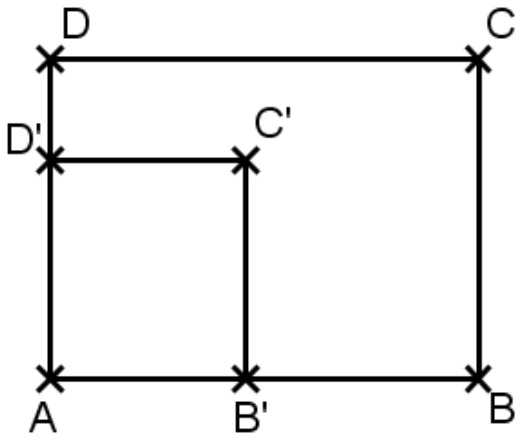
b) Wie groß ist die Fläche des großen Kreises außerhalb der 6 kleinen?



3.1.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Großes Rechteck, kleines Rechteck)

Ein Rechteck A'B'C'D' liegt in einem größeren Rechteck ABCD so, dass die Eckpunkte A' und A zusammenfallen, B' im Inneren der Strecke $\overline{AB}$ und D' im Inneren der Strecke $\overline{AD}$ liegt (siehe Abbildung).
Beweist, dass es eine Gerade gibt, die die Rechtecke ABCD und A'B'C'D' und das Sechseck B'BCDD'C' in jeweils zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt.
(Es darf vorausgesetzt werden, dass die gesuchte Gerade das Sechseck in genau zwei Teile zerlegt.)



Aufgabe 2 (Primzahlzwillinge)

Die Zahlen p und q mit $3 < p < q$ seien ein Primzahlzwillingspaar, also zwei Primzahlen, die sich um genau 2 unterscheiden ($q = p + 2$).
Zeige, dass das arithmetische Mittel $m = \frac{p+q}{2}$ dieser beiden Primzahlen durch 6 teilbar ist und dass das um 1 vermehrte Produkt $p \cdot q + 1$ dieser beiden Primzahlen durch 36 teilbar ist.

3.1.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (Spielstrategie)

Alex und Britta haben von ihrer Oma eine große Tüte Bonbons geschenkt bekommen. Alex schlägt seiner Schwester zum Verteilen der Bonbons folgendes Spiel vor:
„Wir legen sieben Bonbons auf den Tisch und nehmen abwechselnd ein oder zwei Bonbons weg. Wer den letzten Bonbon an sich nimmt, hat gewonnen und darf die Bonbons behalten. Ich fange an."
Nach ein paar Runden gewinnt nur noch Alex.

a) Zeichne drei unterschiedliche Spielverläufe, bei denen Alex gewinnt.
b) Erkläre, wie es Alex schafft jede Spielrunde zu gewinnen.

Britta ist etwas verärgert, weil sie noch keinen einzigen Bonbon bekommen hat, doch beobachtet gut und durchschaut irgendwann seine Strategie. Sie hat eine Idee, damit sie immer gewinnt.
„Ich lege noch Bonbons dazu und die Regel bleibt, wir nehmen abwechselnd ein oder zwei Bonbons und du fängst an"

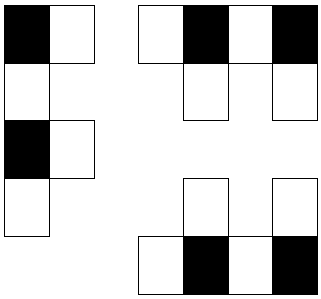
c) Wie viele Bonbons will sie dazulegen? Zeichne einen möglichen Spielverlauf, bei dem Britta gewinnt und erkläre, wie sie es schafft nun jede Spielrunde zu gewinnen.
d) Nenne begründet weitere Bonbonanzahlen, bei denen Britta immer gewinnt.

Aufgabe 2 (Schachbrett – mal anders)

Peter schneidet aus einem Schachbrett zusammenhängende Figuren mit 6 Feldern längs der Linien aus, wobei jede Figur genau zwei schwarze Felder haben soll.

a) Zeichnet alle möglichen derartigen Figuren auf das Raster in Material 1.

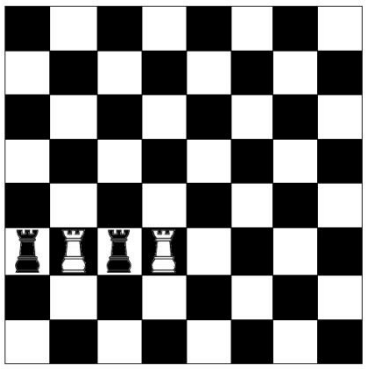
Bemerkung: Symmetrische bzw. gedrehte Figuren wie die in Abbildung 3.3 zählen dabei nur einfach.

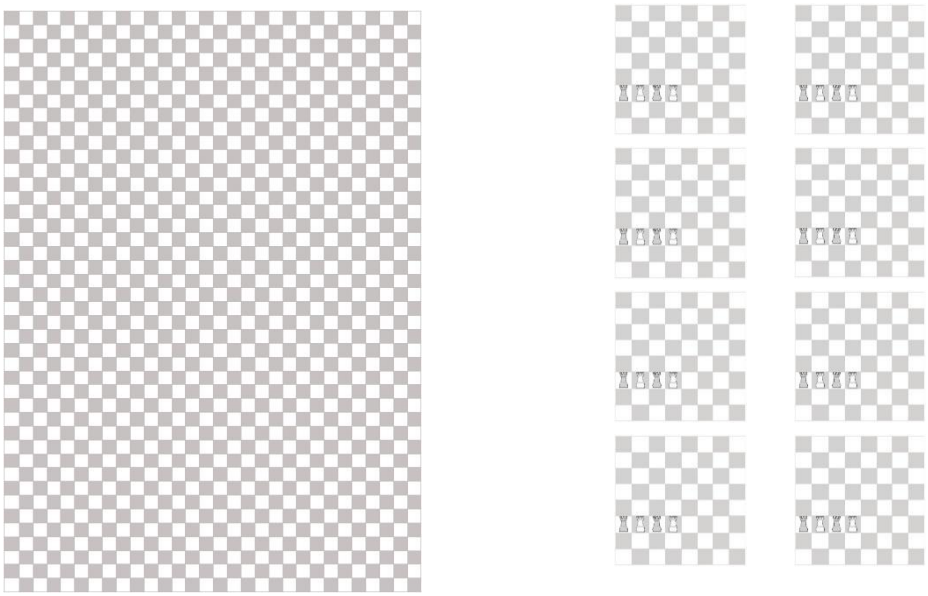


b) Aus wie vielen Feldern bestehen die kleinste und die größte Figur mit genau zwei schwarzen Feldern? Zeichnet alle diese minimalen und maximalen Figuren auf das Raster in Material 1.

c) Gesucht ist eine Zerlegung eines Schachbrettes in vier zueinander deckungsgleiche Figuren. Auf jeder dieser Figuren soll einer der in Abbildung 2 eingezeichneten Türme stehen. Zeichnet eine mögliche Zerlegung ein. Du kannst dazu Material 2 verwenden.

Bemerkung: Deckungsgleich heißen Figuren, die in ihrer Form und Größe übereinstimmen.





Aufgabe 3 (Zahlenfolgen in Mustern)

Anna zeichnet Muster auf Kästchenpapier. Hat sie ein Muster fertig, so bildet sie daraus ein neues Muster. Das macht sie so: Sie zeichnet in jedes Kästchen, das oben, unten, rechts oder links von einem Kreuz des vorigen Musters liegt und noch leer ist, ein neues Kreuz. Die ersten drei Muster sind unten zu sehen.

											X			
					X					X	X	X		
	X			X	X	X			X	X	X	X	X	
					X					X	X	X		
											X			

a) Setzt die abgebildete Folge von Mustern sinnvoll fort. Zeichnet dazu die nächsten beiden Muster.

b) Ermittelt die Anzahl der Kreuze im 4. und im 5. Muster.

c) Ermittelt die Anzahl der Kreuze im 100. Muster.

d) Anna hat nun noch eine andere Idee. Sie möchte aus den Anzahlen der Kreuze im 4. und im 5. Muster die Anzahl der Kreuze im 6. Muster errechnen. Gebt eine Möglichkeit an, mit welchen Rechenoperationen dies geschehen kann.

3.2 OMO 2017 – Gymnasium Bad Essen

3.2.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe1 (ein besonderer Auftrag)

Steffi liebt es, bei scheinbar aufwendigen Rechnereien Möglichkeiten des Nutzens von Rechenvorteilen auszutüfteln - so wie es schon der von ihr bewunderte große Mathematiker Gauß als kleiner Junge getan hat. Ihr Mathematiklehrer gibt ihr daher folgenden Sonderauftrag:

„***Bilde die Summe der Quersummen der natürlichen Zahlen von 0 bis 100***."

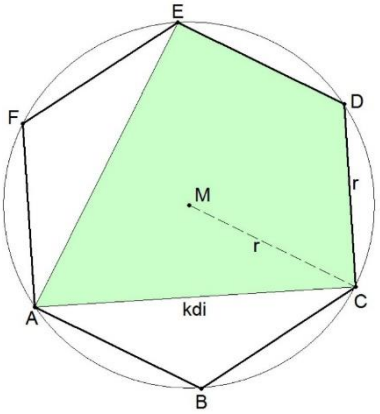
Sie legt sofort die unten aufgeführte Tabelle als systematische Übersicht an. Ohne die Ausfüllerei fortzusetzen, flüstert sie nun ihrem Mathematiklehrer die Lösung ins Ohr.

00	10	20	30	40					
01	11	21	31	41					
02	12	22	32	42					
03	13	23	33	43					
04	14	24	34	44					
05	15	25	35	45					
06	16	26	36	46					
07	17	27	37						
08	18	28	38						
09	19	29	39						

a) Bestimmt die Summe der Quersummen der natürlichen Zahlen von 0 bis 100 auf vorteilhaftem Weg.
b) Begründet, dass die Summe der Quersummen der natürlichen Zahlen von 0 bis 1000 genau 13501 ergibt.
c) Bildet die Summe der Quersummen der natürlichen Zahlen von 0 bis 2017.

Aufgabe 2 (ein besonderer Drache)

Einem Kreis mit Radius „r“ ist ein regelmäßiges Sechseck ABCDEF einbeschrieben; dessen kleine Diagonale wird hier mit „kdi“ bezeichnet.

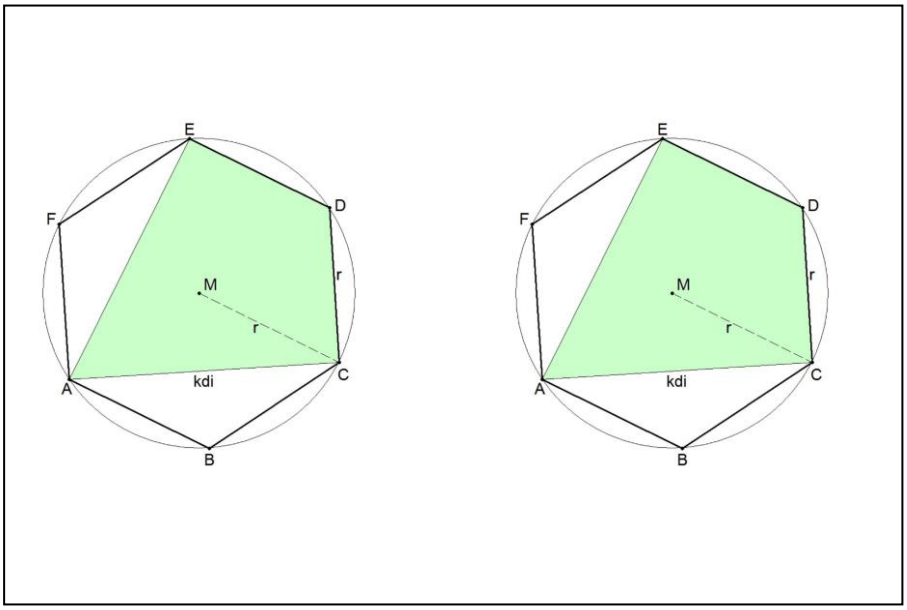


a) Vergleicht den Inhalt des Drachen ACDE mit dem des Vierecks ACDF.
b) Konstruiert ein gleichseitiges Dreieck, das denselben Flächeninhalt wie der Drache ACDE hat.

   (Nutzt das beigefügte Arbeitsblatt für eure Konstruktion; wenn ihr Hilfslinien verwendet, müssen diese erkennbar bleiben.)

   Erläutert, warum eure Konstruktion geeignet ist.

   Arbeitsblatt



Aufgabe 3 (ein besonderes Datum)

Heute, am 2.5.2017, wird Jana 12 Jahre alt. Eigentlich wünscht sie sich als Geburtstagsgeschenk das Einverständnis ihrer Eltern dafür, dass sie mit ihrer Freundin allein nach Paderborn fährt, um dort das Heinz-Nixdorf-Computermuseum zu besuchen. Nach einigem Zögern lenkt ihr Vater ein:

„Aber erst strengst du dein eigenes Gehirn an“, verlangt er – wohlwissend, dass sein Geburtstagskind das Knobeln liebt. “Schau 'mal, ich habe hier Fragen zu deinem Geburtstagsdatum:

Ist die Zahl $\mathbf{2017^{2017} + 5 - 2}$ ***durch 10 teilbar? Ist sie durch 30 teilbar?***

Finde es heraus und erkläre mir deine Antworten. Dann könnt ihr fahren.“

Entscheidet begründet an Janas Stelle.

Aufgabe 4 (eine besondere Abstimmung)

Auf einer Vereinsversammlung der Osnaland-Jugend steht die Entscheidung an, welche der Bands *A-sound (A)*, *B-power (B)* und *C-engine (C)* für die nächste Vereinsfeier gebucht werden soll. Da Vereinsmitglieder in den Bands mitspielen, soll nicht offen abgestimmt werden; es sind aber auch keine Stimmzettel vorbereitet worden.

„Kein Problem“, meint Daniela, „Ich werde die drei Bands gleich nacheinander zur Abstimmung stellen, und ihr sagt jedes Mal entweder „ja“ durch Heben einer Hand oder „nein“ durch Nichtstun. Enthaltungen gibt’s nicht. Damit nicht verfolgt werden kann, wer welche Band möchte, werden eure Antworten aber eventuell gelogen sein. Hat sich erst einmal jeder für genau eine der Bands entschieden?“

Nach allgemeinem Kopfnicken erklärt sie ihr Abstimm-System:

„A-Sound-Fans lügen nie. B-power-Unterstützer lügen immer. Wer C-engine hören will, lügt genau 1-mal, aber nicht gleich bei der ersten Abstimmung. Wenn ihr euch alle daran haltet, sehe ich hinterher klar."

Daniela fragt dann wie geplant zuerst „Bist du für A-sound?", dann „Bist du für B-power?", schließlich „Bist du für C-engine?" und zählt jedes Mal die Personen, die eine Hand heben.

a) Bent beobachtet seine Nachbarin Angelina und hält ihr nach der 3-stufigen Abstimmung vor: „Du hast dich überhaupt nicht gemeldet. Enthaltungen sind doch verboten!"
Untersucht, ob Bents Vorhaltung berechtigt ist.

b) Geht davon aus, dass sich alle Anwesenden an Danielas Verfahren halten. Untersucht, inwieweit Daniela aus ihren drei Zählergebnissen das eigentliche Abstimmungsergebnis erschließen kann.

3.2.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Eine besondere Nummer)

In Oma Friedas Gefriertruhe lagern seit Kurzem von vier unterschiedlichen Sorten Gemüse jeweils 10 durchnummerierte Packungen. In eine der 40 Gemüsepackungen hat sie den Schlüssel ihres Bankschließfaches gesteckt. Da sie ihrem Gedächtnis nicht ganz traut, erzählt sie ihrem Enkel Paul von dem Schlüsselversteck, sagt ihm aber nur, welche Gemüsesorte sie dafür gewählt hat. Die zugehörige Packungsnummer hat sie bereits auf einem Zettel notiert, der in ihrer Brotschüssel liegt.

Monate später nach einer mehrwöchigen Reise erinnert sich Frieda nicht mehr, welche Packung die mit dem Schlüssel ist oder wo ihr Zettel liegt. Als sie ihren Enkel fragt, in welchem Gemüse ihr Schlüssel versteckt ist, tut dieser geheimnisvoll und listet erst einmal die verbliebenen Vorräte auf:

	Nr.	*Nr.*	*Nr.*	*Nr.*	*Nr.*	*Nr.*
Fenchel		*4*	*5*		*9*	*10*
Rosenkohl		*4*		*8*		*10*
Rotkohl	*2*		*5*	*8*		*10*
Wirsing	*3*				*9*	*10*

Diese Aufstellung präsentiert er seiner Oma mit den Worten: „Natürlich weiß ich nun auch nicht genau, welche Packung es ist. Du hast mir ja nur die Gemüsesorte verraten. Bekomme ich trotzdem ein Eis, wenn ich dir sage, welches Gemüse es ist?“

Oma **Frieda**: (ärgerlich) „Weißt du was, ich habe irgendwo einen Zettel mit der Nummer. Wenn ich den finde, brauche ich deine Hilfe vielleicht gar nicht.“

Paul: (mit kurzem Blick auf die Liste)	„Doch, doch, wer nur die Nummer und die Liste kennt, weiß noch nicht genau Bescheid!“
Oma **Frieda**:	„Soso, danke für die kostenlose Hilfe! … Ach, hier in der Brotschüssel ist ja meine Nummer schon, und da du dich eben schön verplappert hast, sagt mir diese Nummer schon genau, in welcher Packung der Schlüssel steckt.“
Paul:	„Tja, ich habe mich wohl wirklich etwas verplappert. Aber wenn ich dir jetzt sage, welche Nummer du gerade gefunden hast, bekomme ich dann mein Eis?“
Oma **Frieda**:	„Wenn du mir erklären kannst, wie du drauf gekommen bist ...“

Untersucht, ob es möglich ist, dass Paul die Nummer der Packung mit dem Schlüssel nun wirklich erschließen kann.

Aufgabe 2 (eine besondere Flasche)

„In den Boden einer und nur einer dieser 5 scheinbar gleichen Flaschen ist das Wort TOR geprägt“, hören Peter und Karl auf einem Stadtfest Standinhaber Dirk verkünden. „50 Euro Einsatz zahlen, die richtige Flasche greifen, und schon könnt ihr den Einsatz und zwei 50 - Euro - Gutscheine fürs Fußballstadion mitnehmen!“ „Na“, meint Karl, „bei 20% - Gewinnchance ist der Einsatz happig.“

„Angebot“, lenkt Dirk spontan ein. „Einer von euch umfasst zunächst eine Flasche, ich räume drei Nieten weg, und wenn ihr wollt, könnt ihr noch zur fünften Flasche wechseln.“ „Das hört sich schon ganz anders an“, meint Peter. „Stelle dir 10 000 Spieldurchgänge vor, Karl“, murmelt er. „Natürlich würde Dirk

vor jedem Durchgang die Flaschen neu anordnen, ohne dass wir zuschauen können. Aber wenn wir in jedem Spieldurchgang nach Dirks Wegräumen von drei Nieten die Flasche wechseln würden, würden wir etwa 8 000 – mal gewinnen!“

a) Untersucht, ob Peter recht hat.

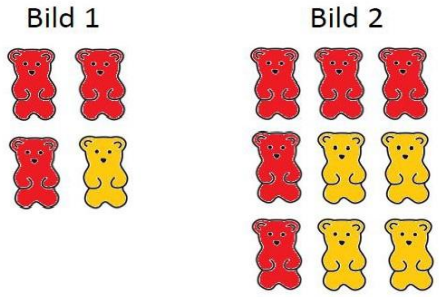
b) Peter und Karl lassen sich nach Dirks Angebot auf einen Spieldurchgang ein und verlieren.
„Eigentlich sollten wir Dirk überreden, einige Nietenflaschen mehr aufzubauen und sein Hilfsangebot entsprechend beizubehalten“, flüstert Peter. „Mit genügend Nietenflaschen bei der einen TOR-Flasche können wir, denke ich 'mal, sogar etwa eine 99% - Chance erreichen, mit einem einzigen Spiel das Pech von eben mehr als auszugleichen. Wir brauchen nur wieder die Flasche zu wechseln, nachdem Dirk lauter Nieten weggeräumt und außer der von uns umfassten Flasche nur noch eine Flasche stehen gelassen hat.“
„Du hörst dich so an, als meintest du, dass mit steigender Gesamtanzahl von Flaschen unsere Chancen steigen“, entgegnet Karl, „aber bei steigender Gesamtanzahl erwischen wir doch die eine TOR-Flasche erst recht nicht!“

Nehmt zu den Äußerungen von Peter und Karl begründet Stellung.

3.2.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (bunte Muster)

Anna isst liebend gern Gummibärchen und hat immer einen Vorrat an gelben und roten Bärchen. Manchmal legt sie mit den bunten Bärchen etliche Musterbilder. Dabei sorgt sie immer dafür, dass sich die Bilder nach einer festen Regel entwickeln. Heute ordnet sie ihre Bärchen bei Bild 1 und Bild 2 wie rechts abgebildet an.

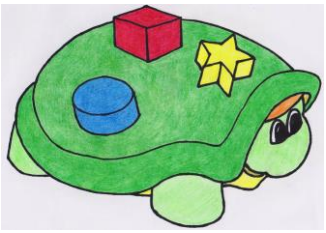


a) Zeichnet Annas System entsprechend Bild 3 und Bild 4. Notiert dann für Bild 1 bis Bild 4 in einer übersichtlichen Tabelle (!) die vier Anzahlen gelegter gelber Bärchen und die vier Anzahlen gelegter roter Bärchen.

b) Ermittelt für Bild 10 und dann für Bild 201, wie viele gelbe und wie viele rote Gummibärchen benötigt werden. (Es soll deutlich werden, wie ihr an eure Zahlen kommt.)

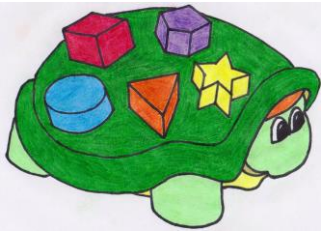
c) Anna möchte beim nächsten Stadtfest mit ihrer Bildfolge aus Gummibärchen ordentlich Farbe auf einen grauen Platz in der Stadt bringen und dabei die Bilder 1 bis 2017 legen.
„Ein Gummibärchen wiegt 2,4 g“, wendet Lars ein.
„Ist dir klar, dass du für deine 2017 Bilder weit über 2000 t gelbe Gummibärchen brauchst?“
„Glaub‘ ich nicht“, entgegnet Anna, „ich hab‘ jetzt auch kein Papier zum Rechnen“.
„Du kannst auch ohne genaues Rechnen feststellen, dass ich recht habe“, meint Lars.
Untersucht, ob Lars wirklich recht hat. Schreibt eure Überlegungen unbedingt übersichtlich auf!

Aufgabe 2 (bunte Tasten)



Hannas neue Spielzeugschildkröte hat auf dem Panzer drei Tasten. Sie zeigen von oben betrachtet einen blauen Kreis, einen gelben Stern und ein rotes Quadrat. Hanna will den Kopf der Schildkröte aus dem Panzer herauskommen lassen. Sie weiß, dass sie dafür alle drei Tasten einzeln und in der richtigen Reihenfolge jeweils 1-mal drücken und nach dem dritten Tastendruck kurz warten muss. Hanna probiert keine Reihenfolge doppelt aus.

a) Ermittelt, wie oft sie im schlimmsten Fall die drei Tasten drücken (und kurz warten) muss, bis die Schildkröte endlich den Kopf herausstreckt.



b) Hanna hat die alte Spielzeug Schildkröte ihrer großen Schwester Lilli gefunden. Sie hat fünf Tasten (blauer Kreis, gelber Stern, rotes Quadrat, oranges Dreieck und violettes Fünfeck). Hanna weiß, dass alle fünf Tasten in der richtigen Reihenfolge nacheinander genau 1-mal gedrückt werden müssen, damit dann nach dem fünften Tastendruck und kurzer Wartezeit der gesamte Kopf sichtbar wird. Natürlich will Hanna den Kopf herauskommen sehen.
Ermittelt, wie viele unterschiedliche Tasten-Reihenfolgen sie im schlimmsten Fall ausprobieren muss, wenn sie keine Reihenfolge doppelt testet.

c) Es ist lange her, dass Lilli selbst die Schildkröte mit den 5 Tasten ausprobiert hat. Sie weiß nur noch, dass man den gelben Stern unmittelbar nach dem blauen Kreis drücken muss. Ermittelt, wie oft Lilli im schlimmsten Fall die 5 Tasten drücken (und kurz warten) muss, wenn sie den Schildkrötenkopf vollständig sehen will und keine Tasten-Reihenfolge doppelt ausprobiert.

Aufgabe 3 (buntes Lügen)

Familie Schlau hat am Wochenende gegrillt. Da die vier Söhne der Familie vorher aber schon reichlich Süßigkeiten genascht hatten, ist noch ein Stück Fleisch übrig geblieben. Es ist vor aller Augen in den Kühlschrank gelegt worden.
Am nächsten Morgen beschwert sich Sohn Pascal, dass das Fleisch verschwunden ist: „Ich habe gestern Abend gar kein Fleisch gegessen. Also war das letzte Stück Fleisch im Kühlschrank eigentlich meins."
Seine Brüder tuscheln kurz miteinander, und sein Bruder Bernd verkündet dann an Pascal gewandt: „Wenn du herausfindest, was mit dem letzten Stück Fleisch passiert ist, bekommst du beim nächsten Grillen ein zweites Stück Fleisch, wir jeder nur eins. Hör uns jetzt einfach genau zu. Wir wissen nämlich alle drei, warum das Fleisch nicht mehr im Kühlschrank liegt, und wir erzählen dir jetzt etwas dazu. Aber aufgepasst, einer und nur einer von uns sagt dir jetzt immer die Wahrheit, die beiden anderen lügen immer. Du musst uns danach nur erklären, wieso wir dir mit unserem Gerede schon alles verraten haben. Fang du an zu erzählen, René!"
René: „Tja, Pascal, das gestern Abend übrig gebliebene Fleischstück ist im Magen eines deiner Brüder verschwunden."
Bernd: „Opa ist gestern Abend noch spät vorbeigekommen und hat es gegessen."
Max: „Papa hat es der trächtigen Nachbarshündin gegeben oder Mama hat es heute früh schon in die Mittagssuppe auf dem Herd geschnitten."
Bernd: „Mama hat das letzte Fleischstück nicht genommen."
Max: „Ich habe es nicht gegessen."
René: „Papa hat es heute früh mit zur Arbeit genommen."

a) Erschließt, was mit dem beim Grillen übrig gebliebenen Fleischstück geschehen ist.
b) Achtet auf eine nachvollziehbare Begründung.

3.3 OMO 2018 – Greselius Gymnasium

3.3.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Quadrieren)

Das Quadrat der dreistelligen natürlichen Zahl 195 kann man folgendermaßen bilden: Man streicht die Ziffer 5. Es bleibt die Zahl 19 übrig. Diese multipliziert man mit ihrem Nachfolger 20 und erhält das Produkt 380. Man hängt 25 an und erhält 38025.
Die Probe $195^2 = 38025$ bestätigt das Ergebnis.

a) Beweise, dass dieses Verfahren für jede dreistellige Zahl mit der Endziffer 5 zum richtigen Ergebnis führt.
b) Untersuche, ob dieses Verfahren für jede beliebige Zahl mit der Endziffer 5 zum richtigen Ergebnis führt.

Aufgabe 2 (Primzahlen)

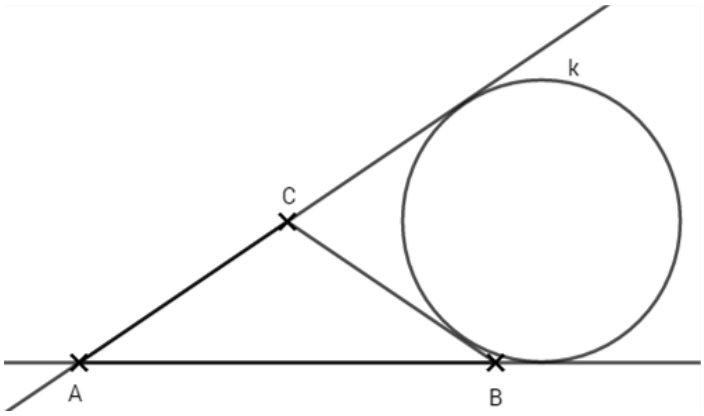
Im Jahr 2018 findet die 23. Osnabrücker Mathematikolympiade statt.

a) Ermittle die Anzahl aller sechsstelligen Zahlen, in denen die Ziffernfolge 2018 in dieser Reihenfolge auftritt. Wie lautet die kleinste und wie die größte dieser sechsstelligen Zahlen?
b) Die Quersumme der Zahl 2018 ist 11. 11 ist eine Primzahl, eine Zahl, die genau 2 Teiler hat, also nur durch sich selbst und 1 ohne Rest teilbar ist. Ermittle die kleinste Primzahl, die bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1 lässt.
c) Beweise, dass sich alle Primzahlen p > 3 in der Form 6n +1 oder 6n – 1 schreiben lassen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist.

Aufgabe 3 (Ankreis)

Das Dreieck ABC sei gleichschenklig mit den Schenkeln$\overline{CA}$ und $\overline{CB}$. Der Ankreis k des Dreiecks ABC berühre die Seite $\overline{CB}$ und die Geraden CA und AB.

Man beweise, dass der Radius von k mit der Länge der Höhe auf der Basis des gleichschenkligen Dreiecks übereinstimmt.

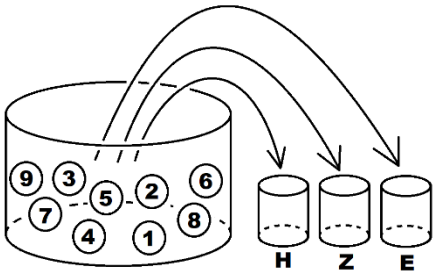


Aufgabe 4 (Gleichgewicht)

Unter 12 Kugeln weicht genau eine im Gewicht ab.
Wie kann man mit höchstens 3 Wägungen auf einer Balkenwaage feststellen, um welche Kugel es sich handelt, und ob diese leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

3.3.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Neun Kugeln, neun Ziffern, mehrere dreistellige Zahlen)



Aus einer Urne mit neun Kugeln, die von 1 bis 9 durchnummeriert sind, werden nacheinander (ohne Zurücklegen) zufällig drei Kugeln gezogen. (Von den Kugeln, die sich jeweils in der Urne befinden, wird jede mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen.)

Die drei Kugeln bilden zusammen eine dreistellige Zahl.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl größer als 500 ist,

a) wenn die erste Kugel die erste Ziffer (Hunderterstelle) der Zahl, die zweite Kugel die zweite Ziffer (Zehnerstelle) der Zahl und die dritte Kugel die dritte Ziffer (Einerstelle) der Zahl angibt?

b) wenn die drei Ziffern der Kugeln nach dem Prinzip „große Hausnummer“ angeordnet werden,
d.h., dass die größte Ziffer an die Hunderterstelle, die kleinste Ziffer an die Einerstelle und die verbleibende Ziffer an die Zehnerstelle gesetzt wird?

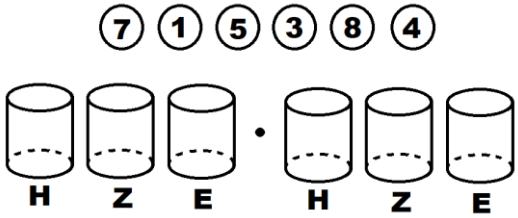
c) wenn die drei Ziffern der Kugeln nach dem Prinzip „kleine Hausnummer“ angeordnet werden,
d.h., dass die größte Ziffer an die Einerstelle, die kleinste Ziffer an die Hunderterstelle
und die verbleibende Ziffer an die Zehnerstelle gesetzt wird?

Gib jeweils einen Term zur Berechnung der jeweiligen Wahrscheinlichkeit an und begründe wie du auf diesen Term kommst.

Peter zieht sechs Kugeln aus der Urne und möchte daraus zwei dreistellige Zahlen bilden. Wie muss Peter diese sechs Kugeln anordnen, damit das Produkt dieser beiden Zahlen …

d) … möglichst klein ist?

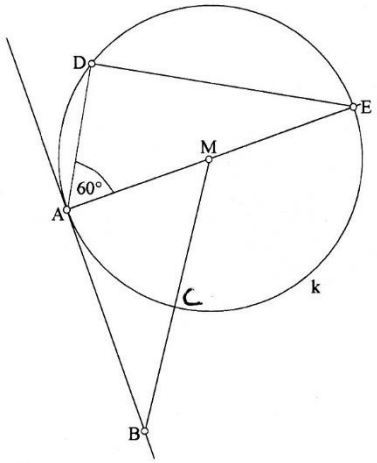
e) … möglichst groß ist?



Gib jeweils die zwei Zahlen an und begründe (ohne das Endergebnis zu berechnen), warum diese zwei Zahlen die jeweilige Bedingung erfüllen.

Aufgabe 2 (Ein Kreis, fünf Punkte, mehrere Geraden und Strecken)

Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Vier Punkte A, C, E und D seien in dieser Reihenfolge auf k so gelegen, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind (siehe Bild):



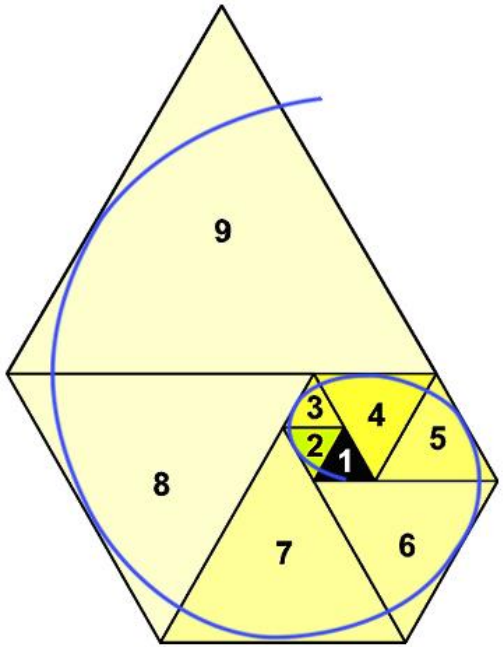
(1) A, M und E liegen auf ein und derselben Geraden.
(2) Es gilt ∢MAD = 60°.
(3) Die Gerade durch M und C schneide die in A an k gelegte Tangente in einem Punkt B derart, dass $\overline{MC} = \overline{BC}$ gilt.

Untersuche, ob unter diesen Voraussetzungen die Strecken AB und DE die gleiche Länge haben!

3.3.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (Die Dreiecksschnecke)

Die Dreiecksschnecke besteht aus lauter gleichseitigen Dreiecken. Das schwarze Dreieck mit der Nummer 1 hat die Seitenlänge 1.
Auch die nächsten beiden Dreiecke mit den Nummern 2 und 3 haben die Seitenlänge 1.
Dann kommen die Dreiecke 4 und 5 mit den Seitenlängen 2.
Die folgenden Dreiecke haben die Seitenlängen 3, 4, 5, 7.



a) Wie oft passt das schwarze Dreieck Nr. 1 in die nebenstehende Gesamtfläche der ersten neun Dreiecke? Denkt daran, eure Lösung nachvollziehbar aufzuschreiben.
b) Welche Seitenlänge hat das Dreieck mit der Nummer 20? Erklärt nachvollziehbar, wie ihr zu eurem Ergebnis kommt.
c) Zeichne eine entsprechende Schnecke bestehend aus Quadraten für die ersten 8 Quadrate. Beginne mit je einem Kästchen für das 1. und das 2. Quadrat.
Wie lässt sich hier ab dem 5. Quadrat die neue Seitenlänge aus den Seitenlängen der vorherigen Quadrate berechnen?

Aufgabe 2 (Perfekt geteilt)

Petra und Marco haben Zahlen mit einer ganz besonderen Eigenschaft entdeckt:

12, 48, 135, 248, 612, 936, 6132.

Diese Zahlen bestehen aus lauter verschiedenen Ziffern und können durch jede der Ziffern ohne Rest geteilt werden!

Beispiel:

12 besteht aus den Ziffern 1 und 2 und ist durch beide Zahlen ohne Rest teilbar.

48 besteht aus den Ziffern 4 und 8 und ist sowohl durch 4 als auch durch 8 ohne Rest teilbar.

6132 besteht aus den Ziffern 6, 1, 3 und 2

6132 ist durch 1 teilbar wie jede beliebige Zahl.

6132 ist durch 2 teilbar, weil die Zahl gerade ist.

6132 ist durch 3 teilbar, weil die Quersumme durch 3 teilbar ist (6 + 1 + 3 + 2 = 12; 12 ist durch 3 teilbar).

6132 ist durch 6 teilbar, weil 6132 sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar ist.

Durch Beachtung der Quersumme und der Endziffern kommen Petra und Marco zu weiteren Zahlen mit diesen Eigenschaften. Die Ziffer Null schließen sie dabei grundsätzlich aus, da ja durch Null nicht dividiert werden darf.

a) Petra und Marco behaupten, dass 864 ist die größte natürliche Zahl, die aus lauter verschiedenen **geraden** Ziffern besteht und durch jede dieser Ziffern ohne Rest teilbar ist. Begründe diese Behauptung.

b) Wie lautet in Anlehnung an Aufgabenteil a) die entsprechende Zahl, wenn nur **ungerade** Ziffern vorkommen dürfen? Schreibt eure Vorgehensweise nachvollziehbar auf.

c) Nenne die **größte** natürliche Zahl mit der besonderen Eigenschaft, die Petra und Marco entdeckt haben. Wie kann man herausfinden, welches die **größte** Zahl mit dieser Eigenschaft ist?

Aufgabe 3 (Uhrzeitpalindrome)

Bei einer Digitaluhr kann man mehrfach am Tag Uhrzeiten wie 03:11:30 oder 14:00:41 sehen, bei denen es egal ist, ob man von links nach rechts oder umgekehrt abliest.

Uhrzeiten mit dieser Eigenschaft nennen wir Uhrzeitpalindrome.

Der Zeitabstand zwischen den einzelnen Palindromen ist unterschiedlich.

Für die oben angegebenen Uhrzeitpalindrome beträgt der Zeitabstand beispielsweise 10:49:11, also 10 Stunden 49 Minuten und 11 Sekunden.

Achtet bei eurer Lösung darauf, dass sie gut nachvollziehbar dargestellt ist.

a) Welchen kürzesten Zeitabstand können zwei aufeinander folgende Uhrzeitpalindrome haben?

b) Wie viel Zeit vergeht höchstens zwischen zwei aufeinander folgenden Uhrzeitpalindromen?

c) Man kann die meisten Digitaluhren statt auf eine 24-Stunden-Darstellung auch auf eine 12-Stunden-Darstellung (am / pm) einstellen. Wie lauten nun der kürzeste und der größte Zeitabstand zwischen zwei aufeinander folgenden Uhrzeitpalindromen?

3.4 OMO 2019 –Gymnasium Bad Iburg

3.4.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Balkenwaage)

a) Man hat vier Gewichte a, b, c und d.
Bestimme die maximale Anzahl von Gegenständen, die man damit abwiegen kann.

b) Man kann mit einer Balkenwaage alle ganzzahligen Gewichte von 1 g bis 40 g bestimmen. Dazu benötigt man lediglich vier verschiedene Gewichtstücke. Bestimme, welche vier Gewichtstücke man benötigt und gib alle Wiegevorgänge an.

c) Nimmt man ein fünftes Gewichtstück hinzu, kann man auch größere ganzzahlige Gewichte bestimmen: 41 g, 42 g, 43 g, …
Bestimme das Höchstgewicht, das man nun maximal erreichen kann.

Aufgabe 2 (Eine besondere Zahl)

Es gibt genau eine zehnstellige Zahl, in der jede der Ziffern 0 bis 9 genau einmal vorkommt, und die die folgende Eigenschaft hat: Betrachtet man statt der gesamten Zahl nur die ersten n Ziffern der Zahl (wobei n irgendeine Zahl zwischen 1 und 10 sein kann), so ist die entstehende Zahl immer durch n teilbar. Nimmt man also zum

Beispiel die ersten drei Ziffern der Zahl, so ergibt sich eine Zahl, die durch 3 teilbar ist; die Zahl, die sich aus den ersten fünf Ziffern ergibt, ist durch 5 teilbar usw.

Finde diese Zahl. Begründe auch, wie du auf die Reihenfolge der Ziffern gekommen bist.

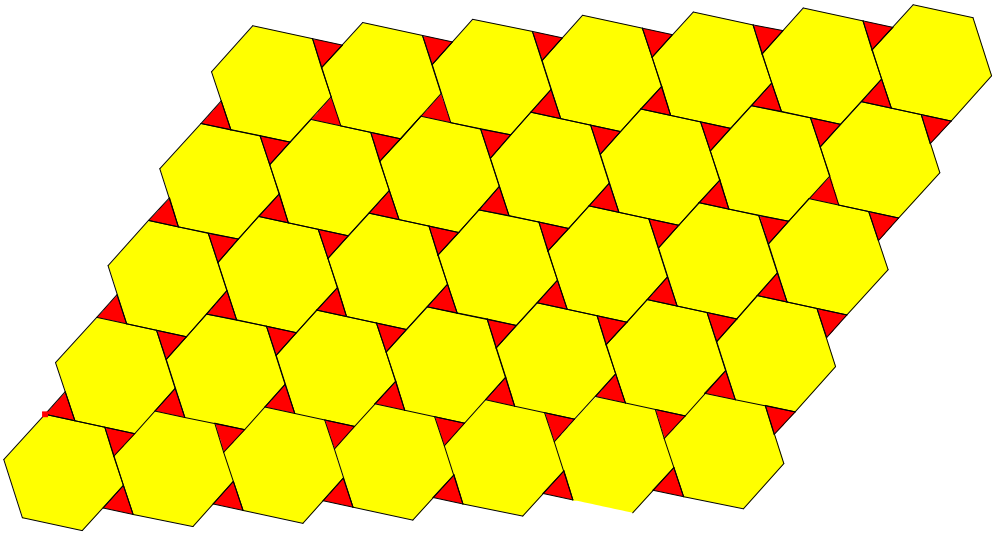
Aufgabe 3 (BODENBELAG)

Ein beliebig großer Fußboden wird mit regelmäßigen Sechsecken und gleichseitigen Dreiecken gekachelt. Eine Dreiecksseite entspricht zunächst der Hälfte einer Sechseckseite.

a) Berechne den Anteil der Dreiecke an der Gesamtfläche.

b) Berechne den Anteil der Dreiecke, wenn die Länge einer Dreiecksseite einem Drittel der Sechseckseite entspricht.

c) Berechne den Anteil der Dreiecke, wenn die Länge einer Dreiecksseite 1/n einer Sechseckseite entspricht.



Aufgabe 4: (Gegen wen zuerst)

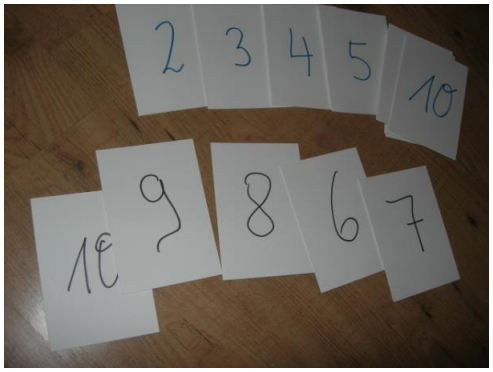
Person A spielt besser Schach als Person B. Person C will genau drei Spiele abwechselnd gegen A und B machen und mindestens zwei Spiele hintereinander gewinnen.
Prüfe, welche Reihenfolge höhere Gewinnchancen verspricht: ABA oder BAB.

3.4.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

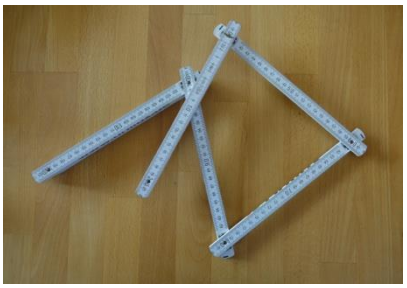
Aufgabe 1 („99 verliert!“)
Max und Sabine spielen ein Spiel, das die folgenden Regeln hat:

- Beide bekommen am Anfang jeweils neun Karten, auf denen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 stehen.
- Max beginnt mit dem Spiel, indem er eine beliebige Karte auf den Tisch legt. Anschließend legt Sabine eine Karte auf den Tisch, dann Max, dann wieder Sabine usw.
- Derjenige Spieler, bei dem die Summe aller auf dem Tisch liegenden Karten den Wert 99 überschreitet, hat verloren.

Leider verliert Max immer und er fragt sich, wieso. Max ist sich sicher, dass Sabine eine Strategie hat, mit der sie immer gewinnt, egal welche Karten Max auf den Tisch legt. Er würde zu gerne wissen, wie diese Strategie aussieht. Helft ihm und sucht diese Strategie!



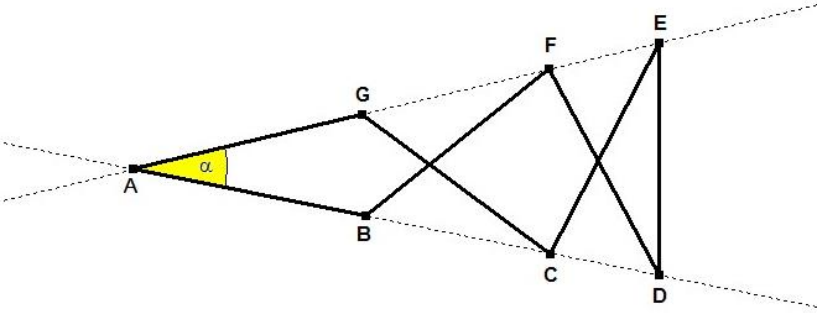
Aufgabe 2 („Eine Winkeljagd am Zollstock“)



Tischler Bernhard besitzt einen Zollstock wie in dem Bild rechts, der aus sieben gleichlangen Stäben besteht. Die Enden der Stäbe sind drehbar miteinander verbunden. Indem Anfang und Ende des Zollstocks aufeinandergelegt werden, wird dieser nun so geformt, wie auf dem Bild unten zu sehen ist.

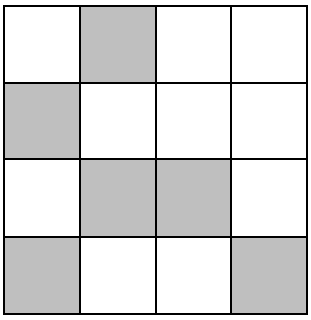
Die Verbindungspunkte A, B, C und D beziehungsweise A, G, F und E liegen hierbei jeweils auf einer Geraden.

Bestimmt die Größe des Winkels α, ohne ihn zu messen. Begründet dabei eure einzelnen Lösungsschritte mit Hilfe von euch bekannten mathematischen Sätzen.



3.4.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (Kreuze im Quadrat)



In einem Rätselbuch findet Tim das folgende Rätsel:

Setze in die weißen Felder des Quadrats Kreuze, so dass sich in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Kreuz befindet.

a) Tim findet fünf Lösungen. Notiere sie.

b) Begründe, warum es nicht mehr als fünf Lösungen geben kann.

Aufgabe 2 (Vom Planeten Horch)

Alle Wesen auf dem Planeten Horch haben mindestens zwei Ohren. Fernab von allen anderen begegnen sich eines Tages drei Horcher.

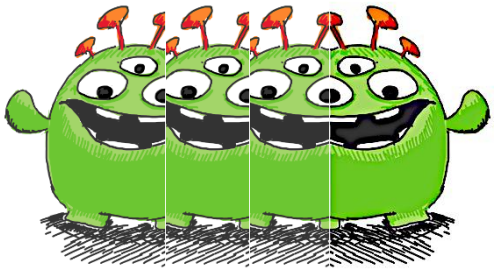
Der erste meint: „Ich sehe sieben Ohren.“

Der zweite stellt fest: „Ich sehe acht Ohren.“

Erstaunt bemerkt der dritte: „Ich sehe nur fünf Ohren.“

(Hinweis: Kein Horcher kann seine eigenen Ohren sehen.)

Bestimme die Ohrenanzahl des dritten Horchers. Gibt es ein eindeutiges Ergebnis? Begründe deine Lösung.



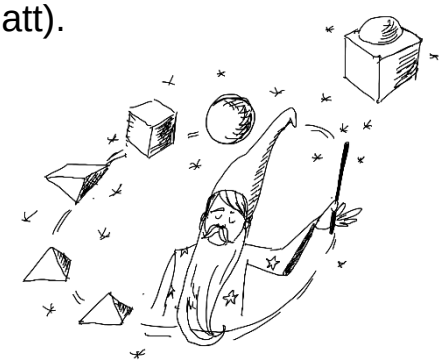
Aufgabe 3 (Zauberei)

Ein Zauberer besitzt verschiedene Körper aus Zaubermaterial (einen Würfel, eine quadratische Pyramide, eine Kugel und zwei Tetraeder). Diese Körper können ineinandergeschoben werden, ohne dass sich ihr Form verändert, dabei leuchtet die Schnittfläche dann magisch auf.

Der Würfel und die quadratische Pyramide haben die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe. Der Durchmesser der Kugel entspricht einer Seitenlänge vom Würfel. Die beiden Tetraeder sind identisch, jede Seitenfläche ist ein gleichseitiges Dreieck.

Der Zauberer schiebt die Kugel und den Würfel so ineinander, dass die Kugel nachher mittig im Würfel liegt.

Der Zauberer hält seine Experimente auf einem Plakat fest und hat 5 Schnittflächen gezeichnet (siehe Lösungsblatt).



- Die Kugel liegt auf dem Würfel auf
- die Kugel ist zu einem Viertel im Würfel
- die Kugel ist halb im Würfel
- die Kugel ist zu dreiviertel im Würfel
- die Kugel ist ganz im Würfel

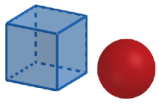
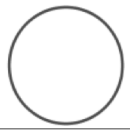
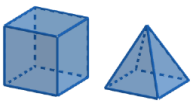
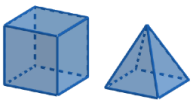
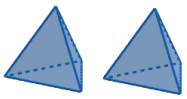
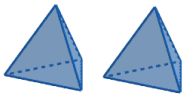
Danach nimmt er sich die quadratische Pyramide und den Würfel. Zuerst schiebt er sie so ineinander, dass die Grundflächen genau übereinstimmen, dabei schiebt er die Spitze der Pyramide zuerst in den Würfel. Danach dreht er die quadratische Pyramide um 45 Grad und schiebt sie wieder in den Würfel. Zum Schluss nimmt er die beiden Tetraeder. Er hält sie Spitze auf Spitze und schiebt sie dann ineinander.

Zuerst sind die Grundflächen zueinander parallel und deckungsgleich. Danach sind die Grundflächen zueinander parallel und gegeneinander um 180 Grad gedreht.

Der Zauberer hat sein Experiment nicht vollständig dokumentiert.

Notiere für die anderen vier Varianten jeweils die fünf Schnittflächen auf dem Lösungsblatt.

Lösungsblatt

 Würfel Kugel					
 Würfel Pyramide					
 Würfel Pyramide					
 Tetraeder Tetraeder					
 Tetraeder Tetraeder					

3.5 OMO 2022 – Ratsgymnasium Osnabrück

3.5.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Hell und schnell)

In einem Fenster stehen zwei Kerzen, die unterschiedlich schnell abbrennen. Bei längerer Beobachtung konnte man folgendes feststellen:

Die längere Kerze wurde um 17.30 Uhr angezündet und brannte bis 23.30 Uhr, dann war sie vollständig niedergebrannt.

Die zweite Kerze war anfangs drei Zentimeter kürzer als die erste vor dem Anzünden. Sie wurde um 19 Uhr angezündet und es dauerte bis 23 Uhr, bevor sie vollständig abgebrannt war.

Um 21.30 Uhr hatten beide Kerzen jedoch die gleiche Länge.

Wie lang waren die beiden Kerzen jeweils, bevor sie entzündet wurden?

Aufgabe 2 (Ein besonderes Jahr)

Brexit, Schaltjahr, das OMO-Jubiläum – 2020 war ein besonderes Jahr, mal ganz abgesehen vom Spaßverderber Corona. Es wird nicht nur deswegen in Erinnerung bleiben, man kann auch mit der Jahreszahl an sich besondere Rechnungen ausführen.

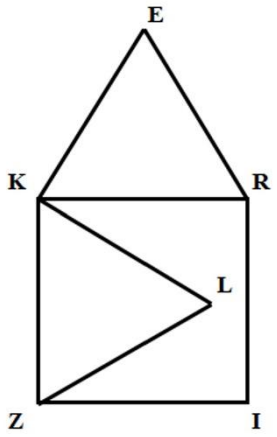
$$(20 + x) \cdot (20 - y) = 2020$$

Findet alle möglichen ganzen Zahlenpaare x und y, für die diese Gleichung gilt.

Begründet, warum es nicht mehr Lösungen geben kann.

Aufgabe 3 (Ist das gerade?)

Das Viereck ZIRK ist ein Quadrat.
Die Dreiecke KRE und ZLK sind gleichseitig.
Begründe: Der Punkt L liegt auf der Geraden EI.



Aufgabe 4 (Zahlen im Dreieck)

Die natürlichen Zahlen werden in folgender Weise notiert

1						
2	3					
4	5	6				
7	8	9	10			
11	12	13	14	15		
16	17	18	19	20	21	usw.

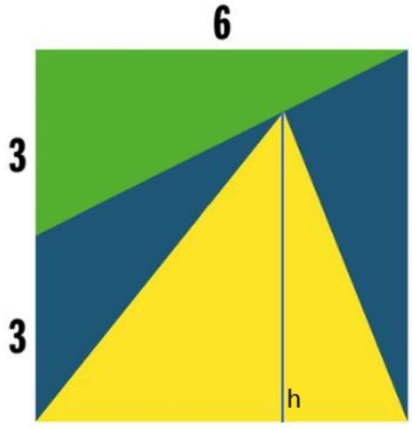
a) Wie heißt die letzte Zahl in der 10. Reihe?
Welches ist die letzte Zahl in der 30. Reihe?
Wie beschreibt man die letzte Zahl in einer beliebigen Reihe n?

b) Welche Zahl steht genau über der Zahl 800? Begründe deine Entscheidung.

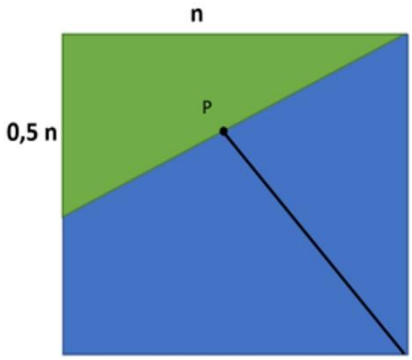
3.5.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Höhe(n)punkt)

1) Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 6cm. Darin sind 4 Dreiecke eingezeichnet (siehe Abbildung).
   Die beiden blauen Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt.
   Wie groß ist die Höhe h des gelben Dreiecks? Begründet.

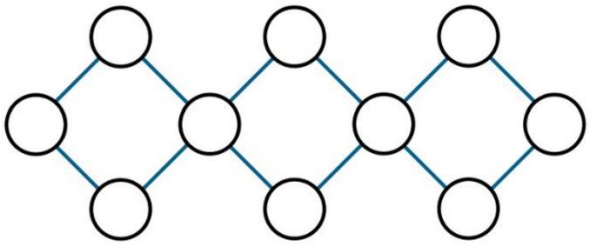


2) Jetzt wird die gesamte untere Fläche eines beliebigen Quadrates blau gefärbt. Wo auf der Seite des grünen Dreiecks muss der Punkt P liegen, damit das so entstehende blaue Dreieck und das so entstehende blaue Viereck den gleichen Flächeninhalt haben?



Aufgabe 2 (Zahlen im Quadrat)

a) Die Zahlen von 1 bis 10 sollen so über die 10 Kreise verteilt werden, dass die Summe der Zahlen in jedem der drei Quadrate gleich groß ist. Jede Zahl muss verwendet werden. Findet eine Lösung.



b) Welches ist die kleinstmögliche Summe, welches die größtmögliche Summe, die man so je Quadrat erreichen kann?

3.5.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (Panzerknacker)

Die Panzerknacker sind mal wieder auf „Einkaufstour“ und stehen vor einem verschlossenen Safe. Der widersteht all ihren Werkzeugen, aber sie finden an der Unterseite des Safes einen Zettel mit Hinweisen für die Zahlenkombination, die der Besitzer wohl zur Erinnerung dort angebracht hat.

Jetzt müssen die Panzerknacker also ihr Gehirn anstrengen. Folgende Hinweise finden sich auf dem Zettel:

1. Die Zahl ist durch 5 teilbar.
2. Die Zahl hat die Quersumme 11.
3. Die Zahl hat das Querprodukt 20.
4. Die Zahl hat mindestens 4 Stellen.

Eifrig machen sich die Panzerknacker an die Arbeit.

a) Gib alle Kombinationen an, die sie ausprobieren müssen.
b) Begründe, warum es keine weiteren Kombinationen (mit mehr oder weniger Stellen) geben kann.

Hinweise:

Für die Quersumme werden alle Ziffern der Zahl addiert.
Beispiel: Die Zahl 543 hat die Quersumme $5 + 4 + 3 = 12$.

Für das Querprodukt werden die Ziffern der Zahl multipliziert.
Beispiel: Die Zahl 543 hat das Querprodukt $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Aufgabe 2 (Schachmatt)

Der Mathematiklehrer Herr Müller veranstaltet ein Schachturnier mit den besten Schülern aus seiner Klasse, nämlich Jona, Lotte und Felix. Jeder spielt genau einmal gegen jeden. Entgegen den üblichen Regeln wird folgendes vereinbart:

Bei einem Sieg erhält man 3 Punkte, bei einem Unentschieden 1 Punkt und wer verliert, erhält keinen Punkt.

Am Ende des Turniers hat Jona 7 Punkte, Lotte 4 Punkte, Felix und Herr Müller jeweils 3 Punkte.

c) Wie viele Partien wurden gespielt?
d) Finde heraus, welche der folgenden Aussagen auf jeden Fall richtig sind und welche falsch sind. Erkläre, warum dem so ist.

A Es hat nur Partien mit Siegern und Verlierern gegeben.

B Jona hat gegen seinen Lehrer gewonnen.

C Man kann aus den Angaben eindeutig erkennen, wie die einzelnen Partien ausgegangen sind.

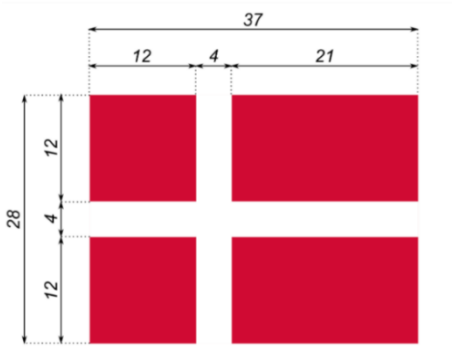
D Jona hat gegen Herrn Müller oder Felix unentschieden gespielt.

E Herr Müller hat einmal gewonnen.

3.6 OMO 2023 – Angelaschule Osnabrück

3.6.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Flagge)



Die dänische Nationalflagge wird Danebrog genannt. Die Maße ihres Musters in beliebigen Längeneinheiten (LE) sind in der Abbildung zu sehen.

a) Bestimme den Anteil der weißen Fläche an der Gesamtfläche der Flagge.
b) Berechne, wie breit die beiden roten Rechtecke sein müssten, wenn ein Viertel der Gesamtfläche weiß sein sollte.

Bei einer ähnlichen Flagge soll das weiße Kreuz die Hälfte der Gesamtfläche bedecken.

c) Bestimme die Breite der weißen Streifen, wenn die Flagge 4 LE breit und 3 LE hoch sein soll.
d) Zeige, dass sich die Breite x des weißen Streifens bei einer Flagge mit dem Umfang u und der Diagonalen d mithilfe der Formel

$$x = \frac{u}{4} - \frac{d}{2}$$

berechnen lässt.

Aufgabe 2 (Kryptogramm)

In das nachstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und dass alle 6 angegebenen Rechenaufgaben (3 vertikale, 3 horizontale) richtig gelöst sind.

ABC	–	DB	=	ECC
:		–		–
FG	•	CH	=	DIH
=		=		=
KC	+	CK	=	DD

a) Gib eine Eintragung an und zeige, dass sie den oben angegebenen Bedingungen genügt.
b) Untersuche, ob es außer der von dir gefundenen Eintragung weitere Möglichkeiten gibt.
Ist dies der Fall, dann ermittle alle Eintragungen, die den Bedingungen genügen.

Aufgabe 3 (Herr Schulze)

Herr Schulze trifft nach langer Zeit Herrn Lehmann und lädt ihn zu sich nach Hause ein. Unterwegs erzählt er Herrn Lehmann, dass er Vater von drei Kindern ist. Herr Lehmann möchte wissen, wie alt diese sind; ihm genügen Angaben in vollen Lebensjahren.
Herr Schulze antwortet:
„Das Produkt der drei Altersangaben beträgt 72. Die Summe der drei Altersangaben ist meine Hausnummer. Wir sind gerade an unserem Haus angekommen; Sie sehen meine Nummer.“
Darauf erwidert Herr Lehmann:
„Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln.“
„Das stimmt“, meint Herr Schulze, „aber irgendwann zwischen der Geburt des zweiten und des dritten Kindes hat der Bau dieses Hauses stattgefunden. Ein Jahr und einen Tag lang haben wir an dem Haus gebaut.“
„Vielen Dank! Nun kann man die Altersangaben eindeutig ermitteln“, beschließt Herr Lehmann das Gespräch.

a) Untersuche, ob es eine Zusammenstellung von drei Altersangaben gibt, für die alle Aussagen dieses Gespräches zutreffen.
b) Untersuche, ob es nur eine solche Zusammenstellung gibt. Wenn das der Fall ist, ermittle diese.

Aufgabe 4 (QK-Zahl)

Eine positive ganze Zahl n, die sich in der Form $n = a^2 + b^3$ mit positiven ganzen Zahlen a, b darstellen lässt, bezeichnen wir als QK-Zahl und alle anderen ganzen Zahlen als Nicht-QK-Zahl.

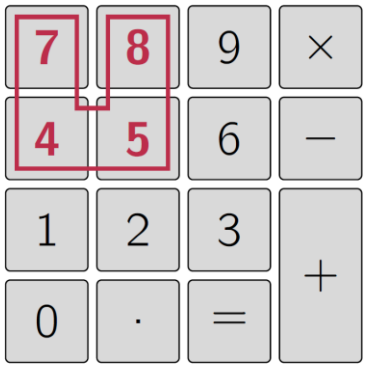
a) Bestimme die Anzahl der QK-Zahlen im Bereich von 1 bis einschließlich 100.
b) Entscheide, ob es im Bereich von 1 bis 1 000 000 mehr QK-Zahlen als Nicht-QK-Zahlen gibt.

Beispiel:
40 027 ist eine QK-Zahl, da $40\,027 = 200^2 + 3^3$ gilt und 200 sowie 3 positive ganze Zahlen sind.

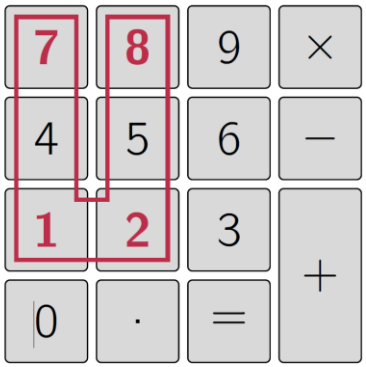
3.6.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Die Sache mit dem „U“)

Nimm einen Taschenrechner und tippe ein kleines oder ein großes „U“ ein: Du tippst vier Tasten, eine oben, eine darunter, eine genau rechts daneben und eine darüber, auf der gleichen Höhe wie die erste Zahl. Zum Beispiel 7458 (kleines „u“) oder 7128 (großes „U“)



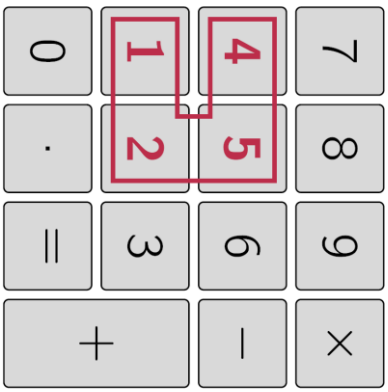
Das kleine „u“



Das große „U“

a) Gib für einen richtig herum gehaltenen Taschenrechner alle möglichen kleinen und alle möglichen großen U-Zahlen an.
b) Zeige für eine der Zahlen aus a), dass sie durch 11 teilbar ist.
c) Zeige allgemein, dass alle U-Zahlen aus a) durch 11 teilbar sind (ohne sie alle nachzurechnen).

Um U-Zahlen zu erhalten, kannst du den Taschenrechner auch drehen und z.B. 1254 eintippen.

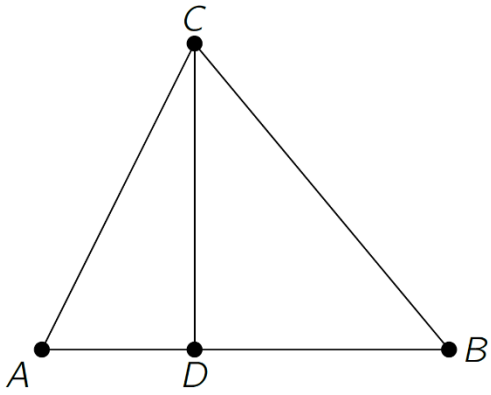


d) Zeige, dass der gedrehte Taschenrechner auch nur durch 11 teilbare Zahlen im „U“ bzw. „u“ hat. Beachte dabei, dass du den Taschenrechner um 90°, 180° und 270° drehen kannst.

Aufgabe 2 (Operationen am Dreieck)

Ist ABC ein Dreieck, das nicht stumpfwinklig ist, so bezeichne D den Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe; E sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an AC, und F sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an BC.

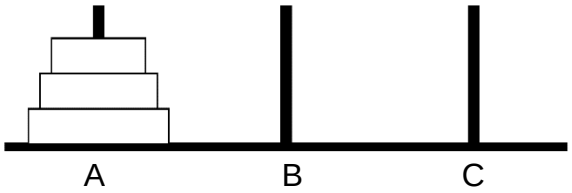
a) Bestimme den Flächeninhalt und den Umfang des Fünfecks ABFCE, wenn $\overline{AB}$= 7 cm und $\overline{CD}$ = 4 cm vorausgesetzt wird.
b) Bestimme den Winkel ACB, wenn -- anders als in a) -- vorausgesetzt wird, dass es eine Gerade gibt, auf der die drei Punkte E, C und F liegen.



3.6.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (Türme von Hanoi)

Bei dem Spiel *Türme von Hanoi* geht es darum, verschieden große Ringe von Stab A auf Stab C zu bringen. Als Hilfe steht immer ein dritter Stab B zur Verfügung. Die Anzahl an Ringen kann dabei variieren. Dabei gelten folgende Regeln:



(1) Es darf immer nur ein einzelner Ring bewegt werden.
(2) Es darf niemals ein größerer Ring auf einem kleineren Ring liegen.
(3) Das Umlegen eines Rings zählt als ein Zug.

Beispiel für 3 Ringe:
Der kleine Ring wird zunächst auf Stab C gelegt. Danach der mittlere Ring auf Stab B. Im Anschluss wird der kleine Ring von C auf den Stab B auf den mittleren gelegt. Der große Ring wird nun von A nach C gelegt, danach der kleine von B nach A. Zum Abschluss wird der mittlere von B nach C auf den großen Ring gelegt und der kleine von A nach C oben drauf.
Man braucht also 7 Züge.
Man dokumentiert für diese Lösung in Kurzform:

AC AB CB AC BA BC AC

a) Zeige, dass es auch eine Lösung für 4 Ringe gibt.
Dokumentiere deine Züge wie im Beispiel.

b) Bestimme wie viele Züge man mindestens bei 5 bzw. 6 Ringen braucht.

c) Ole braucht bei seinem Spiel mindestens 1023 Züge zum Lösen. Bestimme wie viele Ringe das Spiel von Ole hat.

d) 1023 Züge reichen Ole nicht aus. Da er VFL-Fan ist färbt er die Ringe der Größe nach **abwechselnd** lila und weiß und stellt eine neue Regel auf. Nun soll zusätzlich zu den obigen Regeln gelten, dass niemals gleichfarbige Ringe aufeinander liegen dürfen. Erkläre wie viele Züge man nun mindestens braucht.

Aufgabe 2 (Geobrett)

Auf einem Geobrett befinden sich in gleichmäßigen horizontalen und vertikalen Abständen Punkte, an denen Gummibänder befestigt werden können (siehe unten).
Zur besseren Verständigung dienen die roten Zahlen an den Rändern. Der Punkt P liegt dann bei den Koordinaten (4|5). Die blaue Darstellung zwischen den Punkten (1|5) und (5|1) zählt als Linie und nicht als Fläche und besitzt somit keinen Flächeninhalt.

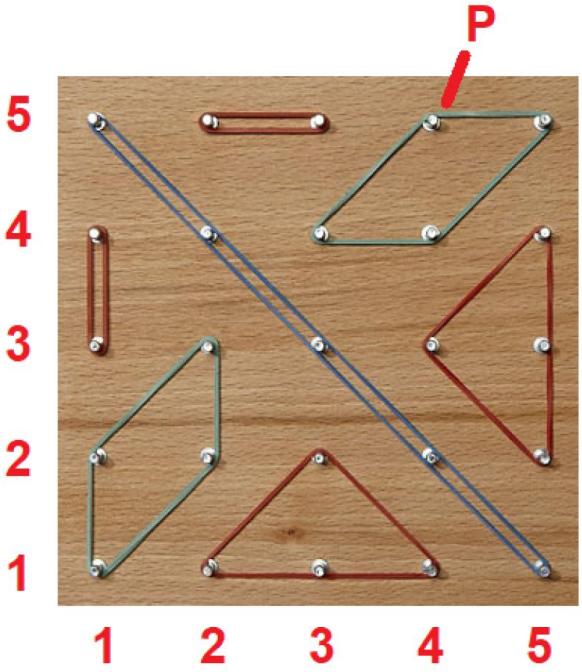
a) Auf einem Geobrett werden für drei Dreiecke folgende Eckpunkte genutzt:
(1|1), (3|5) und (5|1)

(2|1), (3|3) und (4|1)

(2|3), (4|3) und (3|1)

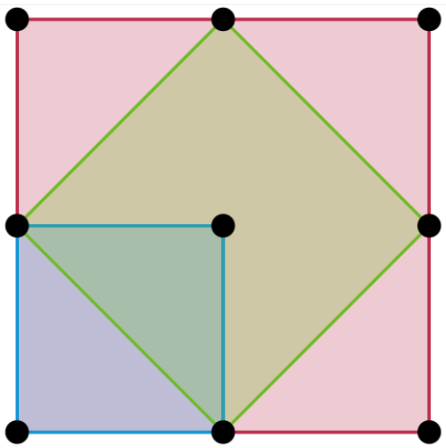
b) Alle Dreiecke zusammen ergeben eine neue Figur. Bestimme die Anzahl der Dreiecke, die in dieser Figur enthalten sind.

Hinweis: Dreiecke mit drei gleichen Eckpunkten zählen nicht mehrfach.



c) Die Punkte, an denen die Gummibänder befestigt werden, seien nun 1 cm auseinander.
Bestimme die Anzahl der verschieden großen Quadrate, die man auf dem 5x5 Geobrett mit Gummibändern erstellen kann und ermittle ihren Flächeninhalt.

d) Im Folgenden geht es nur um die Quadrate mit verschieden großen Flächeninhalten, deren Seitenlinien waagerecht und senkrecht bzw. diagonal im 45◦ Winkel liegen. Rechts sieht man ein Beispiel der drei möglichen verschiedenen Quadrate für ein 3x3 Geobrett.



Bestimme die Anzahl dieser Quadrate auf einem 9x9 Geobrett.

Bestimme die Anzahl dieser Quadrate auf einem 100x100 Geobrett.

Bestimme die Anzahl dieser Quadrate auf einem NxN Geobrett, wobei N eine beliebige natürliche Zahl größer als 1 ist.

Aufgabe 3 (Logical)

Während 5 Rätselfreunde aus dem Rätselforum beschäftigt waren, war der Osterhase bei ihnen zu Besuch und hat bei jedem von ihnen ein Osterei versteckt.
Beantworte folgende Fragen und notiere deinen vollständigen Lösungsweg dabei nachvollziehbar:

- Wer bekommt das Nougat-Ei?
- Bei wem wird ein Ei im Bett versteckt?

Die folgenden Informationen sind bekannt:

1. Das Ei, das in der Sporttasche gefunden wurde, war orange gefärbt.
2. Das gelbe Osterei wurde bei einer Person versteckt, die sich einen Spielfilm im Fernsehen anschaute.
3. Marie war gerade dabei ihre E-Mails zu lesen, als das Ei bei ihr versteckt wurde.
4. Franziska war so in ihr Kreuzworträtsel vertieft, dass sie gar nicht bemerkte, wie das Joghurtei bei ihr versteckt wurde.
5. Bei Tom wurde ein rotes Osterei versteckt. Er war ein wenig enttäuscht, als er feststellte, dass es nicht mit Mokka gefüllt war.
6. Das Ei, das Ella fand, als sie mit ihrer Bastelarbeit fertig war, war nicht grün.
7. Eine Person war so in ihr Buch vertieft, dass sie gar nicht bemerkte, dass bei ihr ein Osterei im Wäschebeutel versteckt wurde.
8. Emilio fand sein Ei im Brotkasten.
9. Das Marzipan-Ei wurde von einer Person im Kleiderschrank gefunden.
10. Das blaue Osterei hatte eine leckere Trüffelfüllung.

4 Die Lösungen

In Anlehnung an die Chronik Teil I habe ich den Aufgaben hier auch die Lösungen angehängt. Ich habe dazu die von den Verfassern angegebenen Lösungen von etwaigen Bewertungsrichtlinien und alternativen Lösungswegen befreit.
Insofern bin ich für die Formulierung der Lösungen weitgehend allein verantwortlich.

Reinhardt Fulge

4.1 OMO 2016 – Gymnasium Bersenbrück

4.1.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Bitte nicht durch drei...)

a) Wegen $a \cdot b \neq 3 \cdot k$ dürfen beide Zahlen kein Vielfaches von 3 sein.
b) Wegen $a - b \neq 3 \cdot k$ müssen beide Zahlen bei der Division durch 3 einen unterschiedlichen Rest belassen.
c) Dann ist aber
$$a + b = 3 \cdot k + 1 + 3 \cdot m + 2 = 3 \cdot (k + m + 1)$$
durch 3 teilbar.
d) Auch hier betrachten wir die Reste bei der Division durch 3. Wegen der Differenzen dürfen keine zwei Reste gleich sein. Es müssen also alle drei Reste vorkommen.
Dann ist die Summe
$$a + b + c = 3 \cdot k + 0 + 3 \cdot m + 1 + 3 \cdot n + 2 = 3 \cdot (k + m + n + 1)$$
durch 3 teilbar.

Aufgabe 2 (Chips)

a) Es gibt insgesamt 8 Möglichkeiten, z.B. in alphabetischer Ordnung:

g	g	g	g
g	g	g	r
g	g	r	g
g	r	g	g

g	r	g	r
r	g	g	g
r	g	r	g
r	g	g	r

b) Es gibt insgesamt 13 Möglichkeiten, die man analog aufzählen kann oder man argumentiert aufbauend auf die a)-Lösung z.B.:
Bei allen 8 Vierer-Kombinationen kann ich rechts einen gelben Chip anlegen.
Einen roten Chip kann ich nur bei den 5 Kombinationen ergänzen, die mit einem gelben Chip enden.
Zusammen sind das 13 Kombinationsmöglichkeiten.

c) Idee: Ich verbinde jeweils zwei Fünfergruppen.
Dabei darf nicht $\mathrm{x\,x\,x\,x\,r}$ mit $\mathrm{r\,x\,x\,x\,x}$ kombiniert werden.
Von den 13 Fünfer-Kombinationen haben 8 rechts einen gelben Chip und können von allen 13 Fünfer-Kombinationen ergänzt werden: $8 \cdot 13 = 104$.
An die übrigen 5 mit einem roten Chip endenden Kombinationen passen nur die 8 Fünfer-Kombinationen, die mit einem gelben Chip beginnen: $5 \cdot 8 = 40$
Es ergeben sich insgesamt $104+40=144$ Kombinationsmöglichkeiten.

Aufgabe 3 (Summe 105)

Es ist jeweils zunächst zu prüfen, ob ich 105 als Summe von s aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen kann.

Für s=6 könnte dies z.B. so aussehen:
Ich bilde die Summe $1+2+3+4+5+6=21$
Und subtrahiere die Summe von 105:
$105 - 21 = 84$ („Rest“).
Ich kann die geforderte Summe bilden, wenn ich den „Rest“ gleichmäßig auf die s Summanden aufteilen kann, d.h., wenn s

ein Teiler des „Restes“ ist. In diesem Fall $84:6=14$. Andernfalls kann ich s Summanden als Lösungsmöglichkeit ausschließen. Schließlich addiere ich diesen Quotienten zu den ersten Summanden und erhalte 105:

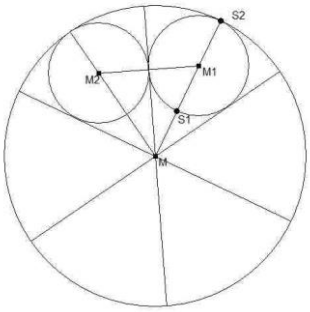
$$15+16+17+18+19+20=105$$

Folgende Tabelle gibt die sieben möglichen Summen an:

s	Summe
2	$52+53$
3	$34+35+36$
5	$19+20+21+22+23$
6	$15+16+17+18+19+20$
7	$12+13+14\ldots+18$
10	$6+7+8\ldots+15$
14	$1+2+3\ldots+14$

Aufgabe 4 (Der große Kreis und die 6 kleinen)

Lösungsskizze

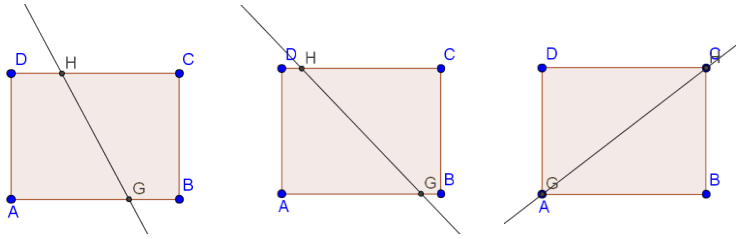


a) Das Dreieck MM1M2 ist gleichschenklig.
Da der Winkel M1MM2=60° beträgt, ist das Dreieck sogar gleichseitig mit $|MM1|=|M1M2|=2r$.
Somit ist
$R=|MS2|=|MM1|+r=3r$

4.1.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

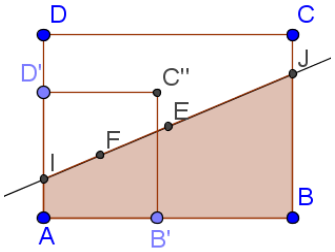
Aufgabe 1 (Großes Rechteck, kleines Rechteck)

Ein Rechteck wird durch eine Gerade geteilt, wenn die Gerade das Rechteck in zwei kongruente Trapeze zerlegt. Dies ist der Fall, wenn die Punkte G, H den gleichen Abstand zu den jeweiligen Eckpunkten haben.



Lösungsskizze a

Alle diese Geraden verlaufen durch den Mittelpunkt des Rechtecks. Dieser ergibt sich als Schnittpunkt der Diagonalen.
Die Gerade, die beide Rechtecke halbiert muss also durch die Mittelpunkte E und F der beiden Rechtecke verlaufen.
Diese Gerade halbiert also sowohl das innere wie auch das äußere Rechteck. Das heißt, dass auch die jeweiligen Restflächen, wenn man die Hälfte des kleinen Rechtecks von der Hälfte des großen Rechtecks abzieht, unabhängig von der Form der Fläche die gleiche Größe haben.
Durch diese Gerade wird damit auch das Sechseck B'BCDD'C" halbiert.



Lösungsskizze b

Aufgabe 2 (Primzahlzwillinge)

Teil 1: Teilbarkeit des arithmetischen Mittels durch 6

$m = ½\,(p + p + 2) = p + 1$ ist durch 2 teilbar, weil p ungerade ist. Von drei aufeinander folgenden Zahlen ist bekanntermaßen immer eine durch 3 teilbar. p, $p+1=m$ und $p+2=q$ sind drei aufeinander folgende Zahlen, von denen p und $p+2$ nicht durch 3 teilbar sind, also muss $m=p+1$ durch 3 teilbar sein.
Damit ist m durch 2 und durch 3 teilbar, also durch 6 teilbar.

Teil 2: Teilbarkeit des Produktes

$p\cdot(p+2) + 1 = p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2$
Nach Teil 1 ist $p + 1$ durch 6 teilbar. Dann ist $(p+1)^2$ auch durch 36 teilbar.

4.1.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (Spielstrategie)

a)

Spiel 1

	Alex	Britta	Rest
1.Zug	1	1	5
2.Zug	2	2	1
3.Zug	1		

Spiel 2

	Alex	Britta	Rest
1.Zug	2	1	4
2.Zug	1	2	1
3.Zug	1		

b) Strategie: Alex muss bei seinem zweiten Zug so viele Bonbons vom Tisch nehmen, dass drei Bonbons verbleiben.
c) Sie legt z. B. 2 Bonbons dazu, es sind also insgesamt 9 Bonbons auf dem Tisch.
Spiel

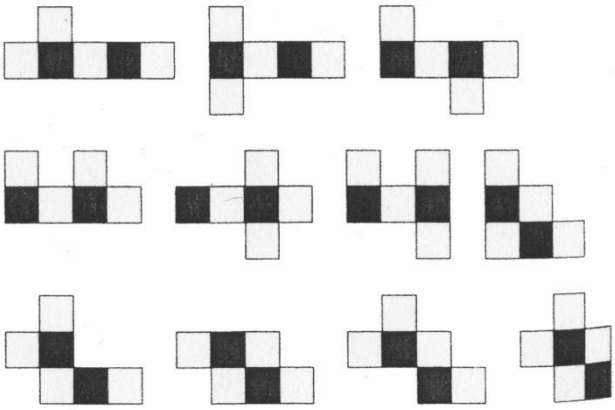
	Alex	Britta	Rest
1.Zug	1	2	6
2.Zug	1	2	3
3.Zug	2	1	

Strategie: Genau wie bei a) muss nun Britta bei ihrem zweiten Zug so viele Bonbons vom Tisch nehmen, dass drei Bonbons verbleiben.

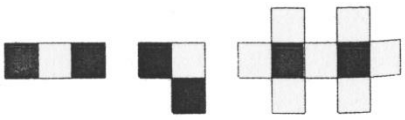
d) Weitere Bonbonanzahlen 12, 15, 18, …
Muss durch drei teilbar sein, da Britta immer so spielen kann, dass sie auf drei genommene Bonbons hinarbeitet, nur so gewährleistet sie, dass am Ende drei Bonbons verbleiben.

Aufgabe 2 (Schachbrett – mal anders)

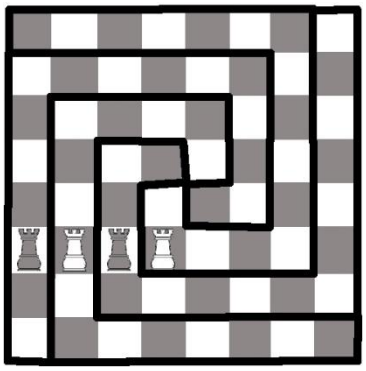
a) Es gibt elf Figuren mit unterschiedlicher Form:



b) Die Figur besteht aus mindestens drei und höchstens neun Feldern:



c) Zerlegung



Aufgabe 3 (Zahlenfolgen in Mustern)

a) Zeichnungen des 4. und 5. Musters

				X				
			X	X	X			
		X	X	X	X	X		
	X	X	X	X	X	X	X	
		X	X	X	X	X		
			X	X	X			
				X				

				X				
			X	X	X			
		X	X	X	X	X		
	X	X	X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	
		X	X	X	X	X		
			X	X	X			
				X				

b) Im vierten Muster gibt es 25 Kreuze, das fünfte besteht aus 41 Kreuzen.

c) Im 100. Muster gibt es $100^2 + 99^2 = 10000 + 9801 = 19801$ Kreuze

d) Wenn wir zur Anzahl der Kreuze des 5. Musters die Differenz aus der Kreuzanzahl des 5. und 4. Musters sowie weitere 4 addieren, erhalten wir die Kreuzanzahl des 6. Musters.
(Im 6. Muster sind also $41 + 41 - 25 + 4 = 61$ Kreuze.)

4.2 OMO 2017 – Gymnasium Bad Essen

4.2.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1

Hier wird nur eine mögliche Lösung aufgezeigt. Es gibt auch andere Möglichkeiten strukturierten vorteilhaften Zusammenziehens.

Zu a)

00	10	20	30	40	50	60	70	80	90
01	11	21	31	41	51	61	71	81	91
02	12	22	32	42	52	62	72	82	92
03	13	23	33	43	53	63	73	83	93
04	14	24	34	44	54	64	74	84	94
05	15	25	35	45	55	65	75	85	95
06	16	26	36	46	56	66	76	86	96
07	17	27	37	47	57	67	77	87	97
08	18	28	38	48	58	68	78	88	98
09	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Summe der Einerziffern in jeder Spalte: 45
Summe der Zehnerziffern in jeder Zeile: 45
Quersumme von 100: 1
Gesamtrechnung: $10 \cdot 45 + 10 \cdot 45 + 1 = 901$

Zu b)
Man kann sich z.B. folgende hundertzeilige Tabelle vorstellen:

000	100	200	300	400	500	600	700	800	900
001	101	201	301	401	501	601	701	801	901
002	102	202	302	402	502	602	702	802	902
003	104	203	303	403	503	603	703	803	903
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
096	196	296	396	496	596	696	796	896	996
097	197	297	397	497	597	697	797	897	997
098	198	298	398	498	598	698	798	898	998
099	199	299	399	499	599	699	799	899	999

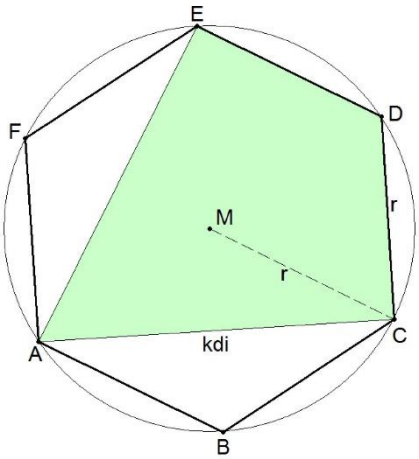
Unter Nutzung von a) lässt sich dann wie folgt fortfahren:
Summe der Quersummen in jeder Spalte bei Nichtbeachtung der Hunderterziffer: 900
Summe der Hunderterziffern in jeder Zeile: 45
Quersumme von 1000: 1
Gesamtrechnung: $10 \cdot 900 + 100 \cdot 45 + 1 = 13501$

Zu c)
Die Summe der Quersummen der natürlichen Zahlen von 0 bis 1000 beträgt 13501.
Das heißt, dass die Summe der Quersummen der natürlichen Zahlen von 0 bis 999 genau **13 500** ist.
Die Summe der Quersummen der natürlichen Zahlen von 0 bis 1999 ergibt sich daher als: $13500 \cdot 2 + 1000 \cdot 1 = 28\,000$

Für die Quersummen der natürlichen Zahlen von 2000 bis 2017 erhält man zudem die Summe:
$18 \cdot 2 + 45 + (8 \cdot 1 + (1+2+3+4+5+6+7)) = 36 + 90 – 9 = 117$

Somit beträgt die zu errechnende Quersumme: 28 117

Aufgabe 2



Zu a) Die beiden Figuren sind inhaltsgleich, da sie beide aus dem Fünfeck ACDEF durch Abschneiden eines Dreiecks mit den Seitenlängen kdi, r, r entstehen.
<u>Alternative:</u> Die beiden Figuren sind inhaltsgleich, da sie aus dem Dreieck ACD durch Hinzufügen eines der Dreiecke ADF und DAE entstehen, wobei diese beiden Dreiecke beide die Seitenlängen 2r, r, kdi haben und somit deckungsgleich sind.

<u>Alternative:</u> Das Viereck ACDF ist ein Rechteck (Winkelbetrachtung!) und wird genauso wie der Drache ACDE von der Geraden

(AD) in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegt, wobei in beiden Fällen eines der beiden Teilstücke Dreieck ACD ist.

Alternative: Das Viereck ACDF ist ein Rechteck (Winkelbetrachtung!), sein Inhalt also kdi · r. Der Dracheninhalt ergibt sich z.B. als $4 \cdot \frac{kdi}{2} \cdot \frac{r}{2}$ (Zerlegung in 4 Dreiecke mit den Seitenlängen kdi, r, r).

Alternative: Strecke $\overline{FD}$ schneidet Strecke $\overline{AE}$ in einem Punkt Z. Die Dreiecke ZDE und ZAF
lassen sich bei gemeinsamer Seitenlänge r nach wsw als kongruent nachweisen ...

Alternative: Das Ausgangssechseck lässt sich sowohl in 6 gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge r zerlegen als auch in 6 Dreiecke mit den Seitenlängen kdi, r, r, so dass diese beiden Dreiecksformen inhaltsgleich sind. Zwei der ersten Sorte und zwei der zweiten bilden das Viereck ACDF, vier der
zweiten Sorte den Drachen ACDE, so dass auch diese beiden Figuren inhaltsgleich sind.

Abwandlung: Der Drache ACDE besteht aus den beiden gleichseitigen Dreiecken CDM und DEM
mit Seitenlänge r sowie zwei Dreiecken mit Seitenlängen kdi, r, r. Das Viereck ACDF setzt sich
aus den beiden gleichseitigen Dreiecken CDM und FAM mit Seitenlänge r sowie zwei Dreiecken mit den Seitenlängen kdi, r, r zusammen. Somit sind Drache ACDE und Viereck ACDF inhaltsgleich.

Zu b) ∢ DCM = (180°- 60°): 2= 60°; das gleiche gilt für den Winkel ∢ MCB, für den (AC) Spiegelachse ist. Folglich liegen die Strecken $\overline{DC}$ und $\overline{AC}$ orthogonal zueinander. Bei Spiegelung von D an (AC) entsteht ein Dreieck AD'D, wobei D' der Spiegelpunkt zu D ist, die Seite $\overline{D'D}$ das Maß 2r hat und die anderen beiden Seiten so lang sind wie ein Kreisdurchmesser. Also ist Dreieck AD'D gleichseitig mit Seitenlänge 2r. Dieses zu (AC) symmetrische Dreieck hat denselben Inhalt wie der zu (AD) symmetrische Drachen. Konstruktion von Dreieck AD'D!

Alternative: Δ FAM geht bei Spiegelung an (AF) in ein gleichseitiges Dreieck AFM ' über. Der 120° große Winkel ∢ AFE und der 60° große Winkel M' FA bilden zusammen einen gestreckten Winkel, so dass aus Symmetriegründen ein Dreieck BEM' entsteht. Dieses ist gleichseitig mit Seitenlänge 2r. Wie der Drache ACDE (s.o.) lässt es sich in zwei gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge r, nämlich Δ ABM und Δ AFM ', sowie zwei Dreiecke mit den Seitenlängen kdi, r, r zerlegen...

Abwandlung: Mit M' als Schnittpunkt von (EF) und (BA) die Gleichseitigkeit von ΔAFM' zeigen ...

Alternative: Natürlich ist auch ein prinzipiell auf Termarbeit abstellender Angang möglich; dabei kann kdi mittels des Satzes des Pythagoras leicht als $\sqrt{3} \cdot r$ erkannt werden. Der Dracheninhalt $\sqrt{3} \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot 2\mathrm{r} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \frac{2\mathrm{r}}{2} \cdot 2\mathrm{r}$ lässt dann bei b) die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 2r rechtfertigen.

Aufgabe 3

Endziffer von 2017^0 ist 1,
von 2017^1 ist 7,
von 2017^2 ist 9,
von 2017^3 ist 3,
von 2017^4 ist 1,
von 2017^5 ist 7,
von 2017^6 ist 9, usw.

Die Endziffer 7 hat 2017^n mit einer natürlichen Zahl n also genau dann, wenn n-1 durch 4 teilbar ist. Wegen $2016 = 4 * 504$ hat 2017^{2017} somit die Endziffer 7, so dass mit 2017^{2017}+3 auch 2017^{2017}+5-2 die Endziffer 0 hat und somit durch 10 teilbar ist.

Die Zahl 2017 hat als Quersumme 10, also eine nicht durch 3 teilbare Quersumme, ist also selbst nicht durch 3 teilbar, so dass auch 2017^{2017} nicht durch die <u>Primzahl</u> 3 teilbar ist(*) und wegen $5 – 2 = 3 = 1 \cdot 3$ damit 2017^{2017}+ 5 - 2 auch nicht.
Daher ist die durch 10 teilbare Zahl 2017^{2017}+ 5 - 2 nicht auch durch 30 teilbar.

(*) Hier wird kein Hinweis auf die Eindeutigkeit von Primfaktorzerlegungen erwartet. Diese Eindeutigkeit verwenden viele Schüler der derzeitigen Klassen 7 bis 10 intuitiv.

Das Argument, dass 3 Primzahl ist, ist nicht ersatzlos verzichtbar. (12 ist nicht durch 8 teilbar, 12^{12} aber sehr wohl.)
Ersatzweise könnte man sich darauf berufen, dass 2017 Primzahl ist, wenn man glaubhaft macht, dass man 2017 nicht nur deswegen als Primzahl einstuft, weil 17 eine ist (2007 ist keine Primzahl).

<u>Alternative:</u>

$(2017^{2017}) mod\ 3 = ((2016+1)^{2017}) mod\ 3 = (((2016+1) mod\ 3)^{2017}) mod\ 3 = 1^{2017} mod\ 3 = 1 mod\ 3 = 1 \neq 0,$

so dass 2017^{2017} nicht durch 3 teilbar ist, also $2017^{2017}+5-2$ auch nicht. Folglich ist $2017^{2017}+5-2$ auch nicht durch $3 \cdot 10 = 30$ teilbar.

2016 hat eine durch 3 teilbare Quersumme, ist also durch 3 teilbar.

Entsprechend kann man auch im ersten Teil vorgehen; das vereinfacht allerdings nicht:

$(2017^{2017})mod10 = (((2010+7)mod10)^{2017})mod10 =$
$(7^{2017})mod10 = (7^{4\cdot 504+1})mod10 =$

$((49\cdot 49)^{504}\cdot 7)mod10 = ((2401mod10)^{504}\cdot 7)mod10 = 7,$
so dass $(2017^{2017}+5-2)mod10 = (7+3)mod\ 10 = 0.$

Folglich ist $2017^{2017}+5-2$ durch 10 teilbar.

Aufgabe 4

Zu a) und b): Eine systematische Textauswertung, wie sie hier tabellarisch gestaltet ist,

	Meldung bei „Bist du für A-sound?“	Meldung bei „Bist du für B-power ?“	Meldung bei „Bist du für C-engine?“	Anzahl Personen
A - Fan (WWW)	x	-	-	a
B - Fan (L L L)	x	-	x	b
C - Fan (W L W)	-	x	x	c1
(W W L)	-	-	-	c2
In gesamt	a + b	c1	b + c1	a + b + c1 + c2

zeigt, dass sich Angelina durchaus an die Vorgaben gehalten haben kann, nämlich, wenn sie C-Fan ist und sich fürs Lügen bei der letzten Frage entschieden hat. Also ist Bents Vorhaltung unberechtigt.
Da Daniela den Wert von c1 und den Wert von b + c1 kennt,

kann sie als Differenz (b + c1) – c1 die Anzahl b der B-Fans errechnen.
Mit Kenntnis des Wertes von b und des Wertes von (a + b) erschließt sich ihr als Differenz (a + b) – b dann die Anzahl a der A-Fans.
Die Anzahl c der C- Fans kann sie nach ihren 3 Zählungen von Meldungen allein nicht bestimmen – sie weiß nur, dass es mindestens c1 C-Fans sind.
Sobald sie aber die Anzahl z aller Anwesenden ermittelt, kann sie c als z – (a+b) bestimmen. Alternativ hilft ein nachträgliches Zählen der c2 Personen, die sich bei den drei Fragen gar nicht gemeldet haben; der Wert von c ergibt sich dann als c1 + c2.

Alternative zu a):
C-Fans melden sich bei der Frage nach Band A nicht, weil sie bei dieser Frage nicht lügen dürfen.
Diejenigen C-Fans, die bei der 2. Frage bei der Wahrheit bleiben, melden sich auch bei dieser Frage nicht. Diese C-Fans müssen den Vorgaben entsprechend bei der 3. Frage lügen, so dass sie sich dann auch bei der dritten Frage nicht melden.
C-Fans, die sich entschlossen haben, erst bei der dritten Frage zu lügen, melden sich also nach Danielas Regeln alle drei Male nicht. Bent hat daher kein Recht, Angelina Vorhaltungen zu machen.

4.2.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1

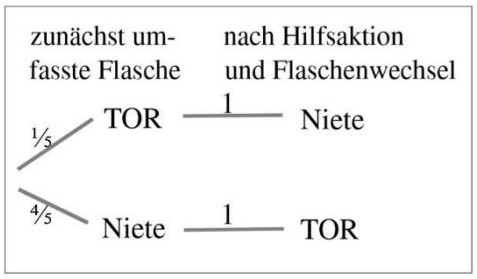
Paul kennt die passende Gemüsesorte. „Wer nur die Nummer und die Liste kennt, weiß noch nicht genau Bescheid“, sagt er. Diese Aussage macht nur Sinn, wenn die Listennummern zur passenden Gemüsesorte sämtlich mehr als 1-mal auf der Liste stehen. Also kann Oma Frieda Rotkohl und Wirsing als passendes Gemüse ausschließen. Und Paul kann sich überlegen, dass er seiner Oma mit seiner Aussage diese Information gegeben hat. Oma Frieda findet dann die passende Nummer und weiß Bescheid. Also kann Paul die sowohl in der Rosenkohl- als auch in der Fenchelzeile notierten Nummern 4 und 10 ausschließen. Sollte Oma Frieda ihm vor Monaten gesagt haben, dass der Schlüssel in einem Fenchelpaket versteckt ist, weiß er jetzt nur, dass die Nummer die 5 oder die 9 ist, mehr nicht. Wenn er aber weiß, dass der Schlüssel in einer Rosenkohl-Packung steckt, kann Paul nun sicher sein, dass 8 die passende Nummer ist.

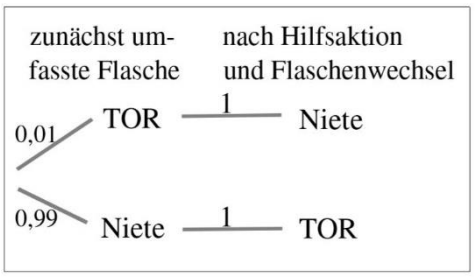
Aufgabe 2

a) Auf lange Sicht greift der Spieler, der zufällig eine der 5 Flaschen wählt, in etwa 20% der Fälle zur TOR- Flasche, so dass er nach Dirks Hilfe beim Wechseln zu einer anderen Flasche verliert. In den anderen rund 80% der Fälle aber greift der Spieler bei zufälliger Wahl einer der 5 Flaschen zu einer der vier Nietenflaschen; in all diesen Fällen bleibt nach Dirks Hilfe außer der umfassten Flasche die TOR-Flasche stehen, so dass ein Flaschenwechsel zum Gewinn führt. Da 10 000 Durchgänge schon eine hinlänglich lange Reihe von Spieldurchführungen bilden, um die obigen Überlegungen grob auf diese Reihe übertragen zu können, hat Peter recht.

b) Hat Dirk nach der ersten Wahl des Spielers derart viele Nieten weggeräumt, dass außer der vom Spieler umfassten Flasche nur noch eine Flasche stehen geblieben ist, so ist eine der beiden noch

im Spiel befindlichen Flaschen die TOR-Flasche. Genau dann, wenn der Spieler anfangs nicht die TOR-Flasche gegriffen hat, führt nun ein Wechseln der Flasche zum Gewinn. Karl verkennt also die Situation. Steigert Dirk die Anzahl der Nietenflaschen, so wächst für den Spieler bei der anfänglichen Flaschenwahl die Chance, eine Niete zu greifen, was bei strategisch konsequentem Flaschenwechsel nach Dirks Hilfsaktion schon den Gewinn bedeutet.
Wenn Dirk mit der TOR-Flasche zusammen 99 Nietenflaschen aufbaut, hat der Spieler bei seiner anfänglichen Flaschenwahl eine 99% - Chance, eine Nietenflasche zu greifen und dann beim Flaschenwechsel nach Dirks Hilfsaktion automatisch zu gewinnen. Also hat Peter prinzipiell recht. (Er würde Dirk aber schon des Aufwandes wegen kaum zum Aufbauen derart vieler Nieten-flaschen überreden können.)
Alternative: Arbeit mit Baumdiagrammen wie bei insgesamt 5 Flaschen bei insgesamt 100 Flaschen.

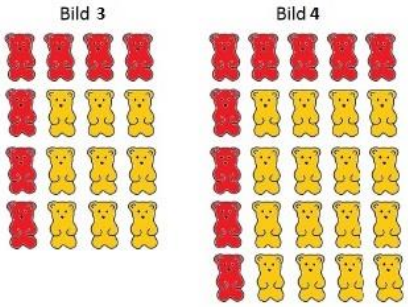




4.2.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (bunte Muster)

a)



	Anzahl **rote**r Gummibärchen	Anzahl **gelbe**r Gummibärchen
Bild Nr.1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$1 \cdot 1 = 1$
Bild Nr.2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	$2 \cdot 2 = 4$
Bild Nr. 3	$2 \cdot 3 + 1 = 7$	$3 \cdot 3 = 9$
Bild Nr. 4	$2 \cdot 4 + 1 = 9$	$4 \cdot 4 = 16$

b)

Bild 10: Es werden 21 (= $2 \cdot 10 + 1$) rote und 100 (= $10 \cdot 10$) gelbe Gummibärchen gebraucht.
Hier ist auch zeichnerisches Lösen möglich.

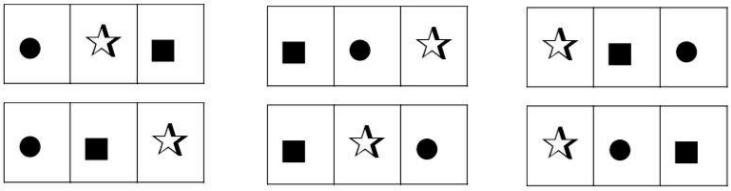
Bild 201: Es werden 403 (= $2 \cdot 201 + 1$) rote und 40401 (= $201 \cdot 201$) gelbe Gummibärchen benötigt.

c)

Für jedes der 1000 Bilder Nr. 1001 bis 2000 werden mehr als $1000 \cdot 1000$ gelbe Gummibärchen gebraucht, allein für diese 1000 Bilder also insgesamt weit mehr als 1 000 000 000 Stück, so dass die für Annas Vorhaben benötigten gelben Gummibärchen zusammen weit mehr als $2{,}4 \cdot 1\,000\,000\,000$ g = 2 400 t wiegen. Lars hat also recht.

Aufgabe 2

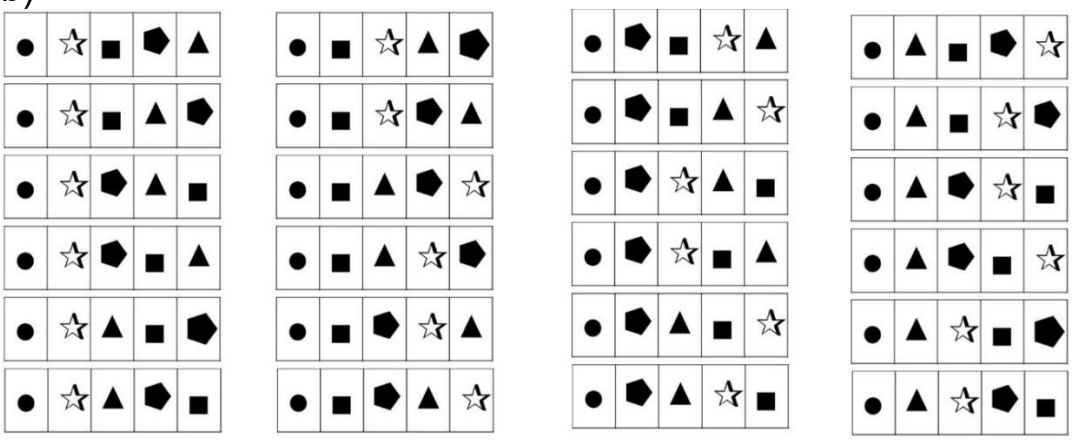
a)



Der Auflistung entsprechend gibt es genau 6 unterschiedliche Reihenfolgen.

<u>Alternative:</u>
Eine Lösung über 3· 2 ist o.k., wenn die Erläuterung die Produktbildung rechtfertigt.

b)

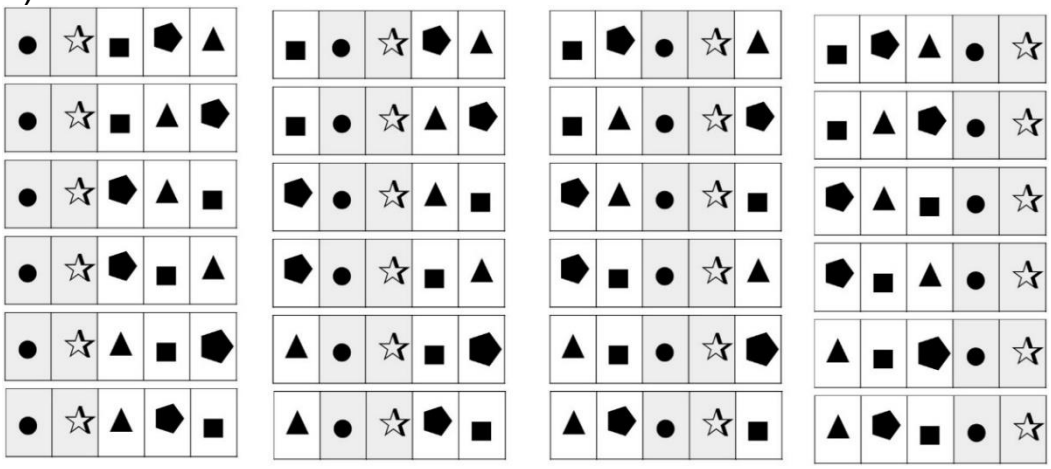


Drückt man die Kreistaste als erste, so gibt es wie aufgelistet 4 · 6 verschiedene Fortführungen der Reihenfolge. Entsprechendes gilt mit einer der anderen Tasten als festgehaltener 1.Taste. Insgesamt sind es damit 5 · 24 = 120 denkbare Reihenfolgen.

<u>Alternative:</u>
Für den ersten Tastendruck gibt es 5 Wahlmöglichkeiten. Egal, welche Taste man genommen hat, lässt sich die gewählte erste Taste auf 4 Arten mit einer zweiten Taste kombinieren. Demnach gibt es für die ersten beiden Tastenbetätigungen insgesamt 5 · 4 Gestaltungsmöglichkeiten.
Bei jeder von ihnen sind nachfolgend drei andere Tasten in freier Reihenfolge zu drücken, was bei jeder Gestaltung der ersten bei-

den Tastenbetätigungen nach a) in 6 unterschiedlichen Reihenfolgen geschehen kann. Also gibt es hier 20 · 6 = 120 denkbare Reihenfolgen für die 5 Tasten.

c)



Alternative:
In einer passenden Reihenfolge kann der Kreis an jeder außer an letzter Stelle platziert werden; der dem Kreis folgende Platz ist in jedem Fall durch den Stern besetzt. Ist der Kreis platziert, können nur noch 3 unterschiedliche Tastenformen in unterschiedliche Reihenfolgen gebracht werden, was nach a) auf jeweils 6 Arten geschehen kann.

Auf beiden Wegen erhält man 4 · 6 = 24 denkbare Reihenfolgen.

Aufgabe 3 (**Bunte Lügen**)

Die beiden Aussagen von René widersprechen sich.
Es folgt: (1) René lügt beide Male. Es folgen: (2) Keiner von Pascals drei Brüdern hat das letzte Fleischstück gegessen. Und (3) Entweder lügt Bernd oder Max lügt. Wegen (2) hat Max mit der Aussage, er habe das letzte Fleischstück nicht gegessen, recht.

Es folgt: (4) Die Aussagen von Max sind beide wahr.
Es folgen: (5) Entweder ist das letzte Fleischstück an Nachbars Hündin gegangen oder die Mutter hat es für die Suppe genommen.Und wegen (3): (6) Bernd lügt beide Male.

Es folgen: (7) Die Mutter hat das letzte Fleischstück genommen. Und wegen (5) (8). Die Mutter hat das letzte Fleischstück in die Suppe geschnitten.

Wenn jemand einen anderen Angang wählt und ausprobieren möchte, wer derjenige ist, der beide Male die Wahrheit sagt, so kann Bernd auch auf anderem Weg als oben ausgeschlossen werden:
Wenn Bernd derjenige wäre, der beide Male die Wahrheit sagt, hätte Opa das noch unangetastete letzte Fleischstück spät abends aufgegessen. Und Max würde dann beide Male lügen und ebenfalls das letzte Fleischstück gegessen haben, was nicht möglich ist. René lügt offensichtlich, da sich seine beiden Aussagen widersprechen. Also sagt Max die Wahrheit, und das letzte Fleischstück ist entweder an die Nachbarshündin gegangen oder in der Suppe gelandet. Da Bernd lügt, hat die Mutter das letzte Fleischstück genommen und in die Suppe geschnitten.

4.3 OMO 2018 – Greselius Gymnasium

4.3.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Quadrieren)

zu a)
Jede dreistellige natürliche Zahl mit der Endziffer 5 lässt sich folgendermaßen notieren:$100h + 10z + 5$, wobei $h \in \mathbb{N}, 1 \leq h \leq 9$die Hunderterziffer und $z \in \mathbb{N}, 0 \leq z \leq 9$ die Zehnerziffer darstellen.
Nach Aufgabenstellung ist folgende Gleichheit zu prüfen, wobei das Anhängen von 25 an eine Zahl einer Multiplikation dieser Zahl mit 100 entspricht:

$$(100h + 10z + 5)^2 = (10h + z) \cdot (10h + (z + 1)) \cdot 100 + 5^2$$

Mit der Überlegung:

$$\begin{aligned} &(10h + z) \cdot (10h + (z + 1)) \cdot 100 + 5^2 \\ &= (10h + z) \cdot (10h + (z + 1)) \cdot 10^2 + 5^2 \\ &= (100h + 10z) \cdot (100h + 10(z + 1)) + 5^2 \end{aligned}$$

folgt:

$$(100h + 10z + 5)^2 = (100h + 10z) \cdot (100h + 10(z + 1)) + 5^2$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} &(100h + 10z + 5)^2 = ((100h + 10z) + 5)^2 \\ &= (100h + 10z)^2 + 2 \cdot (100h + 10z) \cdot 5 + 5^2 \end{aligned}$$

Klammert man den Term$(100h + 10z)$aus, so gilt:

$$(100h + 10z)^2 + 2 \cdot (100h + 10z) \cdot 5 + 5^2 =$$

$(100h + 10z) \cdot ((100h + 10z) + 10) + 5^2$.
Betrachtet man nun den Ausdruck$(100h + 10z) + 10$, so gilt
$(100h + 10z) + 10 = 100h + 10z + 10 = 100h + 10(z + 1)$.
Eingefügt ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} &(100h + 10z) \cdot ((100h + 10z) + 10) + 5^2 \\ &= (100h + 10z) \cdot (100h + 10(z + 1)) + 5^2 \end{aligned}$$

zu b)
Das Verfahren gilt auch für jede beliebige natürliche Zahl mit der Endziffer 5. Zum Nachweis muss man lediglich alle natürlichen Zahlen für h im Beweis von Aufgabenteil a) zulassen.

Aufgabe 2 (Primzahlen)

(a) Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten für die Anordnung der Ziffern 2018:

1. $xy2018$ mit $1 \leq x \leq 9$ $x, y \in \mathbb{N}$
   mit $0 \leq y \leq 9$
   Hier gibt es $9 \cdot 10 = 90$ verschiedene sechsstellige Zahlen.
2. $x2018y$ mit $1 \leq x \leq 9$ $x, y \in \mathbb{N}$
   mit $0 \leq y \leq 9$
   Hier gibt es $9 \cdot 10 = 90$ verschiedene sechsstellige Zahlen.
3. $2018xy$ mit $0 \leq x \leq 9$ $x, y \in \mathbb{N}$
   mit $0 \leq y \leq 9$

Hier gibt es $10 \cdot 10 = 100$ verschiedene sechsstellige Zahlen.

Insgesamt gibt es $2 \cdot 90 + 100 = 280$ Möglichkeiten für eine solche sechsstellige Zahl. Die kleinste dieser Zahlen ist 102018, die größte ist 992018.

(b) Es sei p die gesuchte Primzahl.
Dann ist $p - 1$ durch $2, 5, 7$ und 11 ohne Rest teilbar.
Es gilt: $p - 1 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$
$p = 770k + 1$

$k = 1 \Rightarrow$ $770 \cdot 1 + 1 = 771$ ist durch 3 teilbar und somit keine Primzahl.

$k = 2 \Rightarrow$ $770 \cdot 2 + 1 = 1541$ ist durch 23 teilbar und somit keine Primzahl.

$k = 3 \Rightarrow$ $770 \cdot 3 + 1 = 2311$ ist nicht durch $3, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$ teilbar. Da $53 \cdot 53 = 2809 > 2311$, ist 2311 die gesuchte Primzahl p.

(c) Man kann jede natürliche Zahl x in der Form $x = 6n + r$ mit $0 \leq r \leq 5$ und $n, r \in \mathbb{N}$ darstellen.

(d)

Da jede Primzahl $p > 3$ weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist, gilt: $r \neq 0, 2, 3, 4$.

Damit kommen für r nur die Werte 1 und 5 infrage.

$p = 6n + 1$ mit $n > 0$

$p = 6n + 5 = 6(n + 1) - 1$ mit $(n + 1) > 0$

q.e.d.

Aufgabe 3 (Ankreis)

Bezeichne M den Mittelpunkt des Ankreises.

M hat von der Geraden CB und von der Geraden AC jeweils den Abstand r. Damit liegt M auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.[1] Hieraus folgt, dass gilt $\gamma_1 = \gamma_2$.

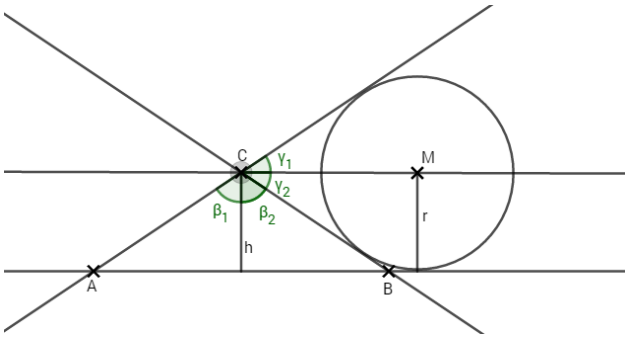
Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gilt zudem $\beta_1 = \beta_2$.

Es folgt: $180° = \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 2\beta_2 + 2\gamma_2 = 2(\beta_2 + \gamma_2)$

Diese Gleichung ist äquivalent zu: $90° = \beta_2 + \gamma_2$

Damit ist h orthogonal sowohl zur Geraden AB als auch zur Geraden MC. Daher sind beide Geraden parallel zueinander.

Die Längen von h und r geben beide den Abstand der zueinander parallelen Geraden an. Da dieser überall gleich ist, ist die Behauptung bewiesen.



[1] Dies ließe sich unter Rückgriff auf den Kongruenzsatz Ssw beweisen, was im Rahmen der Aufgabenlösung aber nicht verlangt wird.

Aufgabe 4 (Gleichgewicht)

Unter 12 Kugeln weicht genau eine im Gewicht ab.
Wie kann man mit höchstens 3 Wägungen auf einer Balkenwaage feststellen, um welche Kugel es sich handelt, und ob diese leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

Lösung:
Bei der ersten Wägung lege man auf jede Seite vier Kugeln. Es gibt nun drei Möglichkeiten, die wir nacheinander diskutieren werden:

Fall (G): Waage bleibt im Gleichgewicht oder
Fall (LS): linke Seite senkt sich oder
Fall (RS): rechte Seite senkt sich.

Fall (G): Wir wissen nun, dass die acht gewogenen Kugeln alle normalgewichtig sind. Die Ausnahmekugel befindet sich also unter den restlichen vier, für die noch zwei Wägungen zur Verfügung stehen.

Jetzt legen wir links drei normale Kugeln und rechts drei der noch zu prüfenden auf die Waage. Bleibt die Waage im Gleichgewicht, so ist die letzte, noch nicht geprüfte Kugel die gesuchte. Und mit der dritten Wägung lässt sich auch feststellen, ob sie zu leicht oder zu schwer ist. Damit ist der Gleichgewichtsfall in der 2.Wägung erledigt.
Bleibt nun die Waage nicht im Gleichgewicht, so wissen wir, ob die Ausnahmekugel zu schwer oder zu leicht ist und dass sie unter den drei Kugeln vorkommt, die mit den normalen gewogen wurden. Wägen wir nun zwei der verdächtigen Kugeln gegeneinander, so lässt sich in jedem Falle die Ausnahmekugel ermitteln. Damit ist die Aufgabe im Falle (G) vollständig gelöst.

Fall (LS), (RS): Diese sind symmetrisch, so dass es ausreicht, etwa den Fall (LS) zu betrachten. Die zwölf Kugeln zerfallen in drei Klassen zu je vier Kugeln, nämlich

Klasse N: Das sind die vier nichtgewogenen und daher normalgewichtigen Kugeln;

Klasse NS: Das sind die vier Kugeln der linken Seite, die entweder normalgewichtig oder zu schwer sind;

Klasse NL: Das sind die vier Kugeln der rechten Seite, die entweder normalgewichtig oder zu leicht sind.

In der zweiten Wägung legen wir auf die linke Seite drei Kugeln, je eine aus jeder Klasse, auf die rechte Seite zwei aus NS und eine aus NL, also

N, NS, NL und NS, NS, NL

Wieder können die drei Fälle (G), (LS), (RS) eintreten:

Fall (G). Dann sind alle gewogenen Kugeln normal und die Ausnahmekugel befindet sich unter den beiden Restkugeln aus der Klasse NL oder der einen Restkugel aus NS. Ein Vergleich der beiden Vertreter aus NL bringt die Entscheidung: Bleibt die Waage gleich, so ist es die Restkugel aus NS, die zu schwer ist; neigt sich die Waage, so ist es die leichtere der beiden. Damit ist der Fall (G) abgeschlossen.

Fall (LS). Da sich die linke Seite nach unten geneigt hat, ist die linksseitige Kugel aus NL normalgewichtig, und aus dem gleichen Grunde auch die beiden NS-Kugeln der rechten Seite. Die Ausnahmekugel kann sich daher nur unter der NS-Kugel der linken oder der NL-Kugel der rechten Seite befinden. Ein Vergleich einer dieser Kugeln mit einer N-Kugel bringt in der letzten Wägung Klarheit: Bei Gleichheit ist es die andere, bei Ungleichheit der Waage ist es die nichtnormale Kugel.

Fall (RS). Hierbei kann die Ausnahmekugel nur unter den beiden NS-Kugeln der rechten oder der NL-Kugel der linken Seite vorkommen. Ein direkter Vergleich der beiden NS-Kugeln liefert wieder die Entscheidung: Bleibt die Waage im Gleichgewicht, so ist es die NL-Kugel, die zu leicht ist, senkt sich die Waage, so ist es die nach unten gesunkene NS-Kugel. Damit ist in jeder denkbaren Möglichkeit mit drei Wägungen die Ausnahmekugel gefunden und gleichzeitig festgestellt, in welcher Weise ihr Gewicht abweicht.

4.3.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Neun Kugeln, neun Ziffern, mehrere dreistellige Zahlen)

a) P (X > 500) = P (X ≥ 500) = P (erste gezogene Ziffer > 4) = 5/9 (= 280/504)

b) P (mind. eine Ziffer > 4) = 1 – P (alle Ziffern < 5) = 1 – 4/9 · 3/8 · 2/7 (= 480/504)

c) P (alle Ziffern > 4) = 5/9 · 4/8 · 3/7 (= 60/504)

d) Die beiden kleinsten Ziffern (1 und 3) müssen an die Hunderterstellen.
Die verbleibende kleinste Ziffer (4) muss an die Zehnerstelle der kleineren Zahl (H = 1)
(weil diese kleinere Zehner-Ziffer (40) dann mit der größeren Zahl multipliziert wird)
und die nächstgrößere Ziffer (5) muss an die Zehnerstelle der größeren Zahl (H = 3)
(weil diese größere Zehner-Ziffer (50) dann mit der kleineren Zahl multipliziert wird).
Die beiden größten Ziffern müssen an die Einerstellen,
wobei die größte Ziffer (8) an die Einerstelle der größeren Zahl gesetzt werden muss (H = 3)
(weil diese größere Einer-Ziffer (8) dann mit der kleineren Zahl multipliziert wird)
und die zweitgrößte Ziffer (7) an die Einerstelle der größeren Zahl (H = 1)
(weil diese kleinere Einer-Ziffer (7) dann mit der größeren Zahl multipliziert wird).

Die gesuchten Zahlen lauten also: 147 und 358!

d) Die beiden größten Ziffern (8 und 7) müssen an die Hunderterstellen.
Die verbleibende größte Ziffer (5) muss an die Zehnerstelle der kleineren Zahl (H = 7)
(weil diese größere Zehner-Ziffer (50) dann mit der größeren Zahl multipliziert wird)
und die nächstkleinere Ziffer (4) muss an die Zehnerstelle der größeren Zahl (H = 8)
(weil diese kleinere Zehner-Ziffer (40) dann mit der kleineren Zahl multipliziert wird).
Die beiden kleinsten Ziffern müssen an die Einerstellen,
wobei die kleinste Ziffer (1) an die Einerstelle der größeren Zahl gesetzt werden muss (H = 8)
(weil diese kleinere Einer-Ziffer (1) dann mit der kleineren Zahl multipliziert wird)
und die zweitkleinste Ziffer (3) an die Einerstelle der kleineren Zahl (H = 7)
(weil diese größere Einer-Ziffer (3) dann mit der größeren Zahl multipliziert wird).

Die gesuchten Zahlen lauten also: 841 und 753!

<u>Aufgabe 2 (Ein Kreis, fünf Punkte, mehrere Strecken und Geraden)</u>

Die Strecken AB und DE sind Seiten der Dreiecke MAB bzw. ADE. Kann man zeigen, dass diese beiden Dreiecke kongruent zueinander sind, so folgt $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Der Radius von k sei r. Nach Voraussetzung (1) ist AE ein Durchmesser von k, also gilt $\overline{AE} = 2r$. Als Radius von k ist auch $\overline{MC} = r$. Nach (3) folgt hieraus $\overline{MB} = 2r$.

Somit gilt: (4) $\overline{MB} = \overline{AE}$.

Nach dem Satz von Thales gilt ∢ADE = 90°. Da die Tangente senkrecht auf dem Berührungsradius steht, gilt ∢BAM = 90°, also ist

(5) ∢BAM = ∢ADE.

Da A und D auf k liegen, ist das Dreieck MAD gleichschenklig mit $\overline{MA} = \overline{MD}$. Für den Basiswinkel folgt aus (2) daher ∢ADM = ∢MAD = 60°, nach dem Innenwinkelsatz also ∢DMA = 60°. Also ist das Dreieck MAD sogar gleichseitig und es gilt

(6) $\overline{MA} = \overline{AD}$.

In den Dreiecken MAB bzw. ADE liegt der in (5) genannte Winkel als rechter Winkel der längsten Seite gegenüber, die in (4) genannt ist. Nach dem Kongruenzsatz Ssw folgt somit $\Delta MAB \cong \Delta ADE$ und damit $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Anderer Lösungsweg: Wie oben zeigt man (4) und (5). Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegt nun A auf dem Kreis mit dem Durchmesser BM, der nach (3) als Mittelpunkt C hat. Somit ist $\overline{CA} = \overline{CM} = \overline{AM}$, also das Dreieck ACM gleichseitig und es folgt

∢AMB = ∢AMC = 60°, nach (2) also weiter (7) ∢AMB = ∢MAD = ∢EAD.

Aus (4), (5) u. (7) folgt (über die Winkelsumme im Dreieck mit 180°-90°-60° = 30° =∢MBA =∢DEA) nach dem Kongruenzsatz wsw, dass $\Delta MAB \cong \Delta ADE$, also $\overline{AB} = \overline{DE}$ gilt.

4.3.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (Dreiecksschnecke)

Teil a: *Antwort:*

Das schwarze Dreieck passt 110-mal in die gegebene Figur.

Darstellungsmöglichkeit der Lösung:

i)

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Seiten-länge	1	1	1	2	2	3	4	5	7
Flächen-inhalt	1	1	1	4	4	9	16	25	49

Das Dreieck mit der Nummer 4 hat die Seitenlänge 2 und den Flächeninhalt 4. Entsprechend gilt der Rest (siehe Tabelle).

ii) Einzeichnen sämtlicher kleinen Dreiecke in die vorhandene Figur.

Die Seitenlänge eines jeden weiteren Dreiecks kann mit Hilfe der vorherigen Dreiecke bestimmt bzw. abgelesen werden.

Füllt man das neue Dreieck mit kleinen schwarzen Dreiecken aus, so erhält man zusätzlich zur Spitze immer Doppelreihen von Dreiecken der folgenden Art.

Berechnung der Gesamtsumme

$1+ 1 + 1 + 4 + 4 + 9 + 16+ 25 + 49 = 110$

Teil b: *Antwort:*

Das Dreieck Nr. 20 hat eine Seitenlänge von 151.

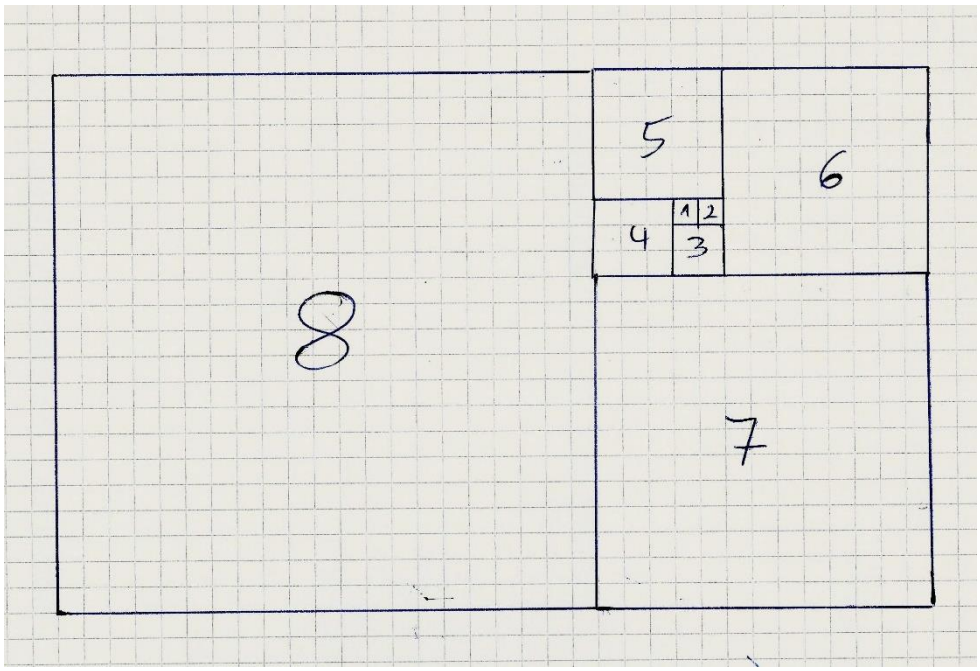
Vorüberlegungen

Die Darstellung der Überlegung, wie sich mit Hilfe der vorherigen Dreiecke das neue Dreieck berechnen lässt, kann mit Hilfe einer Zeichnung erfolgen oder mit Hilfe einer Zahlenfolge

Für die Lösung notwendige Erkenntnis:
Ab dem 6ten Dreieck ergibt sich die nächste Seitenlänge immer als Summe der letzten und der fünftletzten Seitenlänge, also:
5tes Dreieck: **1**,1,1,2,**2** 6. Dreieck: 1 + 2 = 3 Einheiten Seitenlänge
6tes Dreieck: 1,**1**,1,2,2,**3** 7. Dreieck: 1 + 3 = 4 Einheiten Seitenlänge
7tes Dreieck: 1,1,**1**,2,2,3,**4** 8. Dreieck: 1 + 4 = 5 Einheiten Seitenlänge
8tes Dreieck: 1,1,1,**2**,2,3,4,**5** 9. Dreieck: 2 + 5 = 7 Einheiten Seitenlänge

Fortsetzung der Folge
Dreiecke 1 bis 10: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9,
Dreiecke 11 bis 20: 12 ,16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151,
Dreiecke 21 bis 30: 200, 265, 351, 465, 616, 816, 1081, 1432, 1897, 2513

Teil c:
Zeichnung der Schnecke



Berechnung der neuen Seitenlänge

Die 2 Punkte setzen sich wie folgt zusammen:
1 Punkt für die Angabe einzelner Beispiele
1 Punkt für die Verallgemeinerung

Ab dem 5. Quadrat berechnet sich die neue Seitenlänge aus der Summe des letzten, dritt- und viertletzten Quadrates:
5. Quadrat: Seitenlänge des 4., 2. und 1. Quadrates
6. Quadrat: Seitenlänge des 5., 3. und 2. Quadrates
7. Quadrat: Seitenlänge des 6., 4. und 3. Quadrates
8. Quadrat: Seitenlänge des 7., 5. und 4. Quadrates
usw.

Verallgemeinerung ist gegeben, sobald eine systematische Struktur erkennbar ist.
Seitenangaben auflisten

Aufgabe 2: (Perfekt geteilt)

a) Beschränkung auf die 4 Ziffern 2, 4, 6 und 8

Lösungsmöglichkeit 1:

Teilbarkeitsregel durch 3: Eine aus allen vier Ziffern 2, 4, 6, 8 gebildete Zahl hat die Quersumme 20, ist somit nicht durch 3 teilbar und kann deshalb auch kein Vielfaches von 6 sein.

Folgerung: Man kann also nur drei der restlichen Ziffern verwenden.

Lässt man die kleinste Ziffer weg, kann als größte Zahl noch 864 gebildet werden.

Überprüfung, ob die Zahl den vorgegebenen Bedingungen entspricht

Dies kann geschehen:

a) Durch Nachrechnen 864 : 8 = 108 864 : 6 = 144 864 : 4 = 216
b) Durch Anwenden der Teilbarkeitsregeln

Lösungsmöglichkeit 2:

Durchprobieren aller Permutationsmöglichkeiten der Ziffern

Endergebnis 864

b) Die ungeraden Ziffern sind: 1, 3, 5, 7, 9.

Ziffern ausschließen:

Eine Zahl, die mit allen fünf Ziffern gebildet wird, hat die Quersumme 25 und kann deshalb weder durch 9 noch durch 3 teilbar sein.

Ziffer 7 muss ausgeschlossen werden:

Um nicht mehr als eine Ziffer streichen zu müssen, strebt man die Quersumme 18 an und lässt daher die Ziffer 7 weg.

Jede aus den vier Ziffern 1, 3, 5, 9 gebildete Zahl ist durch 1, 3, und 9 teilbar.

Damit sie auch durch 5 teilbar ist, muss sie auf 5 enden.

Also lautet die Lösung: 9315

c) Durch Beachtung der Quersumme und der Endziffern erkennen Petra und Marco, dass 9867312 die größte Zahl mit dieser Eigenschaft ist. (Beweis über Durchrechnen)

9867312 : 9 = 1096368
9867312 : 8 = 1233414
9867312 : 6 = 1644552
9867312 : 7 = 1409616
9867312 : 3 = 3289104
9867312 : 1 = 9867312
9867312 : 2 = 4933656

<u>Finden der Zahl:</u>

987654321 -> -Quersumme ist 45, also durch 3 und 9 teilbar und

Zahl muss durch 5 teilbar sein, also 5 ans Ende (denn eine Ziffer 0 gibt es nicht) -> 987643215

Aber: Zahl muss auch gerade sein -> ***Widerspruch: gerade und letzte Ziffer eine 5***

Also muss die ***Ziffer 5 weg***. (Denn, wenn die Zahl nicht gerade ist, müssen automatisch 4 andere Ziffern – nämlich 2, 4, 6 und 8 – wegfallen, da eine ungerade Zahl durch keine dieser Ziffern teilbar ist. Da aber die gesuchte Zahl möglichst groß sein soll, sollte man möglichst wenige Ziffern entfernen.)

Damit die Zahl trotzdem noch durch 9 teilbar ist, muss die ***Quersumme angepasst*** werden. Auch ***die 4 muss daher weg*** (9-5 = 4, Ziffern im Wert von „4“ müssen also entfernt werden. Alternativer

Gedanke: Die Quersumme ohne die Ziffer 5 ist 40. Die nächste durch 9 teilbare Quersumme ist 36, es bietet sich also an die Ziffer 4 zu entfernen.)

Überprüfung:

Übrig bleiben also die Ziffern 98763**21.** Es geht nun also noch um die korrekte Reihenfolge.

2 ans Ende, da gerade Zahl: 98763**12**

Diese Zahl ist durch 1 teilbar, durch 2 teilbar da gerade, durch 3 teilbar da die Quersumme durch 3 teilbar ist und durch 6 teilbar, da die Zahl durch 3 und 2 teilbar ist.

Die Zahl ist durch 9 teilbar, da die Quersumme durch 9 teilbar.

Teilbar durch 7? -> 7 | 7000000 und 7 | 2800000 , also auch 7 | 9800000

-> Betrachtung der letzten 5 Stellen: 76312

-> 7 | 70000 und 7 | 6300 | aber 12 ist nicht teilbar durch 7

Systematisches Probieren oder Überlegungen mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln bzw. Umsortieren der einzelnen Ziffern führen zu den letzten 5 Stellen 67312. Für diese Zahl gilt: 7 | 67312 (da 7 | 63000, 7 | 4200, 7 | 112)

Vermutlich größte Zahl mit gewünschter Eigenschaft: **9867312**

Teilbarkeit durch 8? 8 | 9867312 (denn eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die letzten 3 Ziffern durch 8 teilbar sind und es gilt in der Tat 8 | 312)

Ergebnis: 9867312

Aufgabe 3 (Uhrzeitpalindrome)

a) Zwischen zwei aufeinander folgenden Uhrzeitpalindromen vergehen mindestens 4 Minuten und 28 Sekunden.

b) Aufeinander folgende Uhrzeitpalindrome liegen höchstens 4 Stunden, 4 Minuten und 11 Sekunden auseinander.

Erklärung:

In der Mitte der Uhrzeit stehen die Minutenangaben. Um ein Palindrom zu erhalten, können die Minutenangabe nur 00, 11, 22, 33, 44 oder 55 sein.
Innerhalb derselben Stunde liegen somit immer 11 Minuten zwischen zwei Uhrzeitpalindromen.
Als Stundenangaben sind 00, 01, 02, 03, 04, 05, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22 und 23 möglich, da nur hierbei die gespiegelten Zahlen 00, 10, 20, 30, 40, 50, 01, 11, 21, 31, 41, 51, 02, 12, 22 oder 32 als Sekundenzahlen auftreten können. (06, 07, 08, 09, 16, 17, 18 und 19 würden zu 60, 70, 80, 90, 61, 71, 81 und 91 Sekunden führen, was bei Uhrzeiten in dieser Darstellung nicht möglich ist.) (3 Punkte, davon 1 Punkt für den Ausschluss von 6 Uhr bis einschließlich 9 Uhr und von 16 Uhr bis einschließlich 19 Uhr mit Begründung)
Beim Wechsel von einer Stunde zur nächsten kommt in der Regel ein Abstand von 5 min 10 s vor, z.B. zwischen 12:55:21 und 13:00:31.
Aber es gibt Sonderfälle, nämlich dann, wenn „Lücken“ zwischen den Uhrzeitpalindromen auftauchen. Dies ist der Fall:

1. Von 23:55:32 zu 00:00:00 Abstand 4:28
2. Von 05:55:50 zu 10:00:01 Abstand 4:04:11
3. Von 15:55:51 zu 20:00:02 Abstand 4:04:11

c) Zwischen zwei aufeinander folgenden Uhrzeitpalindromen vergehen mindesten 4 Minuten und 49 Sekunden. Aufeinander folgende Uhrzeitpalindrome liegen höchsten 4 Stunden, 4 Minuten und 11 Sekunden auseinander.

Lösung im Prinzip wie bei a) und b), aber die Darstellung der Anzeige geht nur von 1 Uhr bis 12 Uhr

Basisüberlegungen wie bei a) und b):

Nur Schnapszahlen als Minuten

Als Stundenangaben sind nur 01, 02, 03, 04, 05, 10, 11 und 12 möglich (06 bis einschließlich 09 entfallen aus den gleichen Gründen wie bei Aufgabe a) und b)

Sonderfälle:

Der Sonderfall für den maximalen Abstand von Uhrzeitpalindromen bleibt derselbe wie bei b)

Von 05:55:50 bis 10:00:01 Abstand 4:04:11

Der Sonderfall für den minimalen Abstand liegt beim Zahlensprung von 12 Uhr auf 1 Uhr

Von 12:55:21 bis 01:00:10 Abstand 4:49

4.4 OMO 2019 – Gymnasium Bad Iburg

4.4.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Balkenwaage)

a) Wenn man die Gewichtstücke nur auf eine Schale legt, hat man für jedes Gewichtstück die Möglichkeit es auf die Schale oder daneben zu legen. Man erhält insgesamt 2^4=16 Möglichkeiten. Die Möglichkeit, dass kein Gewichtstück auf der Waage liegt ist nicht sinnvoll. Man kann also maximal 16 – 1 = 15 verschiedene Gegenstände wiegen.
Legt man die Gewichtstücke sowohl auf die linke als auch auf die rechte Waagschale, so gibt es für jedes Gewichtstück drei Möglichkeiten. Man erhält also 3^4 = 81 Möglichkeiten, wobei wieder die Möglichkeit, dass kein Gewichtstück auf der Waage liegt nicht berücksichtigt wird. Insgesamt kann man maximal 40 verschiedene Gegenstände wiegen, da die Seiten der Waage vertauscht werden können.

b) Die Summe der vier Gewichte muss 40 g ergeben. Nur beim zweischaligen Wiegen ergeben sich 40 Möglichkeiten. 1g und 3g sind sicher dabei. Damit kann man schon 1g, 2g, 3g, und 4g abwiegen. Um 5g abwiegen zu können, bildet man die Differenz zu dem noch fehlenden Gewichtsstück:

x – 4g = 5g und erhält x = 9g.

Damit die Summe 40g ergibt, muss das letzte Gewichtsstück 27g wiegen, denn 40g – 1g – 3g – 9g = 27g.
Übersicht über alle Wiegevorgänge, die gesuchten Gewichte sind jeweils in rot notiert worden:

linke Schale	rechte Schale
1	1
3	2 + 1
3	3
3 + 1	4
9	5 + 3 + 1
9	6 + 3
9 + 1	7 + 3
9	8 + 1

linke Schale	rechte Schale
9	9
9 + 1	10
9 + 3	11 + 1
9 + 3	12
9 + 3 + 1	13
27	14 + 9 + 3 + 1
27	15 + 9 + 3
27 + 1	16 + 9 + 3

linke Schale	rechte Schale
27	17 + 9 + 1
27	18 + 9
27 + 1	19 + 9
27 + 3	20 + 9 + 1
27 + 3	21 + 9
27 + 3 + 1	22 + 9
27	23 + 3 + 1
27	24 + 3
27 + 1	25 + 3
27	26 + 1
27	27
27 +1	28
27 + 3	29 + 1

linke Schale	rechte Schale
27 + 3	30
27 + 3 + 1	31
27 + 9	32 + 3 + 1
27 + 9	33 + 3
27 + 9 + 1	34 + 3
27 + 9	35 + 1
27 + 9	36
27 + 9 + 1	37
27 + 9 + 3	38 + 1
27 + 9 + 3	39
27 + 9 + 3 + 1	40

c) Man erkennt, dass alle Gewichtstücke Potenzen von drei darstellen. Daher wählt man als fünftes Gewichtstück 81g. Man kann dann maximal 121g abwiegen, denn 1+3+9+27+81=121.

Aufgabe 2 (Eine besondere Zahl)

Die Ziffer an der i-ten Stelle der Zahl wird mit a_i bezeichnet. Die Zahl selbst ist also $(a_1a_2 \ldots a_{10})$, die aus den ersten k Ziffern beispielsweise $(a_1a_2 \ldots a_k)$.

(1) Zunächst erkennt man, dass die Zahlen, die aus den ersten zwei, vier, sechs, acht und zehn Ziffern gebildet werden, durch eine gerade Zahl teilbar sein müssen. Die geraden Ziffern müssen also an den geraden Stellen, die ungeraden Ziffern an den ungeraden Stellen stehen.
(2) Da die gesamte zehnstellige Zahl durch zehn teilbar sein muss, ist $a_{10} = 0$.
(3) Die Zahl aus den ersten fünf Ziffern ist durch fünf teilbar. Da die Null schon vergeben ist, ist $a_5 = 5$.

(4) Die Zahl (a1a2a3a4) muss durch 4 teilbar sein. Da a3 ungerade ist (1), geht dies nur, wenn a4 = 2 oder a4 = 6 ist (die Null wurde in (2) schon vergeben).

(5) Die Zahlen (a1a2a3) und auch (a1a2a3a4a5a6) sind durch drei teilbar, wenn ihre Quersummen durch drei teilbar sind. Somit ist auch die Differenz a4+a5+a6 dieser beiden Quersummen, und damit auch die Zahl (a4a5a6) durch 3 teilbar. Mit (3) und (4) ergibt sich zwingend eine der Formen (25a6) oder (65a6). Die Ziffer a6 ist gerade (1) und alle drei Ziffern sind verschieden. Daher bleiben die Möglichkeiten (a4a5a6) = 258 und (a4a5a6) = 654.

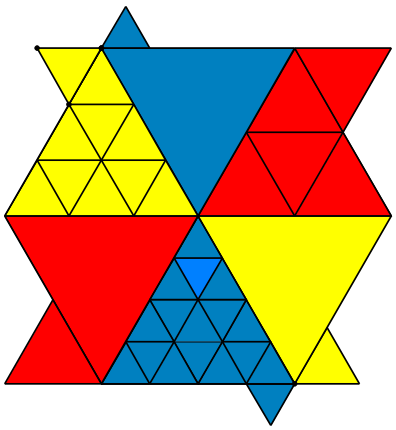
(6) Wir schließen (a4a5a6) = 258 aus. Wäre (a4a5a6) = 258, so bleiben für a8 die Möglichkeiten a8 = 4 oder a8 = 6. Die Zahl (a1a2a3a4a5a6a7a8) ist durch acht teilbar genau dann, wenn (a6a7a8) durch acht teilbar ist. Es ist a6 = 8 und a7 ungerade. Da alle Zahlen der Form (8a74) mit a7 ungerade nicht durch acht teilbar sind, muss also a8 = 6 und a2 = 4 sein. Für die Besetzung der Stellen a1 und a3 folgt daraus, da (a14a3) durch drei teilbar sein muss und nur noch 1, 3 und 7 als ungerade Ziffern in Frage kommen, dass (a1a2a3) = (147) oder (a1a2a3) = (741) ist. Für a7 bleiben die Möglichkeiten a7 = 9 oder a7 = 3. Damit die Zahl (a1a2a3a4a5a6a7a8) durch acht teilbar ist, muss (8a76) durch 8 teilbar sein, also ist a7 = 9 und a9 = 3. Es verbleiben die Möglichkeiten (147258963) und (741258963). Man prüft, dass für diese die Zahl aus den ersten sieben Ziffern nicht durch 7 teilbar ist. Die Möglichkeit (a4a5a6) = 258 ist somit ausgeschlossen. Wir haben somit (a4a5a6) = 654.

(7) Es bleiben somit die geraden Ziffern 2 und 8 auf a2 und a8 zu verteilen. Die Zahl (a1a2a3a4a5a6a7a8) ist durch acht teilbar genau dann, wenn (a6a7a8) durch acht teilbar ist. Es ist a6 = 4 und a7 ungerade. Da alle Zahlen der Form (4a78) mit a7 ungerade nicht durch acht teilbar sind, ist also a8 = 2 und mithin als letzte zu vergebende gerade Stelle a2 = 8. Weiterhin bleiben als Möglichkeiten für die siebte Stelle a7 = 3 oder a7 = 7.

(8) Zu vergeben sind nun noch die Ziffern 1, 3, 5 und 7 auf die Stellen a1, a3, a7 und a9. Da (a1a2a3) durch drei teilbar ist und a2 = 8 ist, muss die Summe a1 + a3 modulo 3 den Rest eins lassen. Ebenso muss (a7a8a9) durch drei teilbar sein und daher

(da a8 = 2 ist) a7+a9 hierbei den Rest eins lassen; zusätzlich ist nach (6) a7 = 3 oder a7 = 7. Hierfür gibt es 8 Möglichkeiten: 1896543270, 1896547230, 9816543270, 9816547230, 7896543210, 9876543210, 3816547290, 1836547290. Hiervon ist nur für 3816547290 der aus den ersten sieben Ziffern gebildete Teil 3816547 durch sieben teilbar.
Die gesuchte Zahl ist also gefunden: 3816547290.

Aufgabe 3 (BODENBELAG)



Jeweils zwei Dreiecke und ein Sechseck bilden zusammen ein Achteck, mit dem man die ganze Fläche ausfüllen kann. Es reicht daher, den Anteil der beiden Dreiecke am Achteck zu berechnen.

a) Wenn man zu jedem Sechseck jeweils ein Dreieck und das am Sechseckmittelpunkt gespiegelte Dreieck gegenüber dazu nimmt, erhält man ein Achteck, mit dem die Ebene parkettiert werden kann.
Ein regelmäßiges Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken der gleichen Kantenlänge.
Wenn nun jedem gleichseitigen Dreieck kleine gleichseitige Dreiecke einbeschrieben werden mit der halben Kantenlänge, dann enthält jedes Dreieck vier kleine Dreiecke.
Das entsprechende Achteck besteht aus 26 kleinen Dreiecken. Davon sind zwei rot: 2/26 = 1/13.

b) Wenn nun jedem gleichseitigen Dreieck kleine gleichseitige Dreiecke einbeschrieben werden mit einem Drittel der Kantenlänge, dann enthält jedes Dreieck neun kleine Dreiecke.
Das entsprechende Achteck besteht aus 56 Dreiecken. Davon sind zwei rot: 2/56 = 1/28.

c) Wenn nun jedem gleichseitigen Dreieck kleine gleichseitige Dreiecke einbeschrieben werden mit Kantenlänge 1/n, dann enthält jedes Dreieck n^2 kleine Dreiecke.
Das entsprechende Achteck besteht aus $6*n^2+2$ Dreiecken. Davon sind zwei rot: $2/(6*n^2+2) = 1/(3*n^2+1)$.

Aufgabe 4: (Gegen wen zuerst)

Analyse der Kombination ABA
Der Spieler gewinnt mindestens zweimal hintereinander, d.h. er kann alle Spiele, die ersten beiden, oder die letzten beiden Spiele gewinnen.
$P(ABA)=pA\cdot pB\cdot pA+pA\cdot pB\cdot(1-pA)+(1-pA)\cdot pB\cdot pA=2\cdot pA\cdot pB-pA^2\cdot pB$

Analyse der Kombination BAB
Auch in diesem Fall kann er alle Spiele, die ersten beiden, oder die letzten beiden Spiele gewinnen.
$P(BAB)=pB\cdot pA\cdot pB+pB\cdot pA\cdot(1-pB)+(1-pB)\cdot pA\cdot pB=2\cdot pA\cdot pB-pB^2pA$

Vergleich der beiden Kombinationen:
Vermutung: $P(BAB) < P(ABA)$
$2\cdot pA\cdot pB-pB^2pA < 2\cdot pA\cdot pB-pA^2pB$
$-pB^2pA < -pA^2pB$
$pB > pA$
Da $pA < pB$ ist, stimmt die Vermutung und er sollte die Kombination ABA wählen.

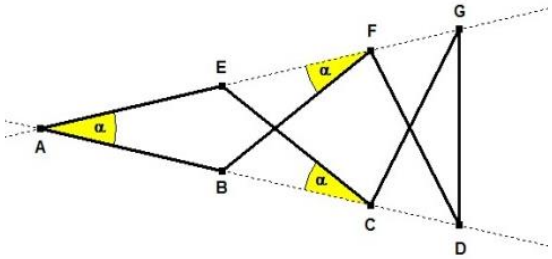
4.4.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

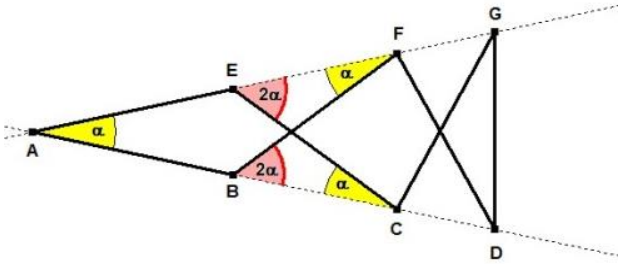
Aufgabe 1 („99 verliert!“)

Sabines Trick besteht darin, dass sie nie die Karte mit der Zahl 8 legt. In diesem Fall muss Max immer verlieren.
Der Gesamtwert der Karten von 2 bis 10 eines Spielers beträgt 54. Alle Karten zusammen ergeben also eine Summe von 108.
Wir betrachten die letzte Runde, wenn die beiden Spieler jeweils noch eine Karte übrighaben. Wenn Sabine alle ihre Karten ausgespielt hat außer der einen Karte mit der Nummer 8, so hat sie insgesamt 54 – 8= 46 Punkte auf den Stapel gelegt.
Bei der letzten Runde muss Max wieder anfangen. Nehmen wir an, er habe noch eine Karte mit dem Kartenwert x auf der Hand, wobei $2 \leq x \leq 10$ ist.
Dann liegen 46 Punkte von Sabine und 54 – x Karten von Max, also insgesamt 46 + (54 – x) = 100 – x Karten auf dem Stapel.
Wenn er dann seine Karte legt, überschreitet er die 99 und verliert.

Aufgabe 2 („Eine Winkeljagd am Zollstock“)

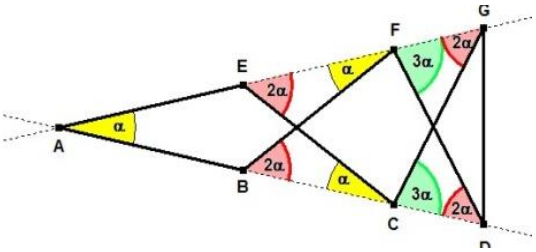
Die Strecken $\overline{AB}, \overline{AE}, \overline{BF}, \overline{EC}$, $\overline{CG}, \overline{FD}$ und $\overline{DG}$ sind gleich lang.



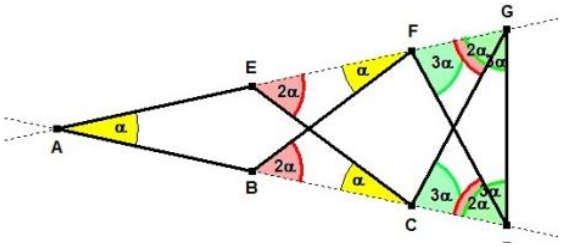


Betrachtet man die gleichschenkligen Dreiecke ACE und ABF, so sind die Basiswinkel gleich groß und damit sind die Winkel ECA und AFB ebenfalls gleich α.

Betrachtet man die Winkelsumme im Dreieck ACE, so muss die Größe des Winkels AEC 180°-2α betragen. Der Nebenwinkel zum Winkel AEC ist der Winkel CEF und dieser hat somit die Größe 2α. Dies gilt analog für den Winkel FBA und den zugehörigen Nebenwinkel CBF.



Betrachtet man nun das gleichschenklige Dreieck BDF, so hat der Basiswinkel FDB ebenfalls die Größe 2α. Die Größe des Winkels BFD ergibt sich aus dem Winkelsummensatz zu 180°–4α. Da die Winkel AFB, BFD und DFG einen gestreckten Winkel bilden, folgt für die Größe des Winkels DFG: 180°–(180°–4α)–α=3α. Analog ergibt sich die Größe des Winkels DCG.



Betrachtet man nun das gleichschenklige Dreieck CDG, so ergibt sich für die Größe des Winkels GDC ebenfalls 3α. Analog ergibt sich aus der Betrachtung des Dreiecks FDG die Größe des Winkels FGD mit 3α.

Zum Schluss schaut man sich die Winkelsumme des Dreiecks ADG an. Man erhält: 180°=α+3α+3α=7α und somit muss für die Größe des Winkels α gelten: 180°:7≈25,9°.

4.4.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (Kreuze im Quadrat)

a)

(1)

	Sp1	Sp2	Sp3	Sp4
Z1	X			
Z2		X		
Z3				X
Z4			X	

(2)

	Sp1	Sp2	Sp3	Sp4
Z1	X			
Z2			X	
Z3				X
Z4		X		

(3)

	Sp1	Sp2	Sp3	Sp4
Z1			X	
Z2				X
Z3	X			
Z4		X		

(4)

	Sp1	Sp2	Sp3	Sp4
Z1				X
Z2			X	
Z3	X			
Z4		X		

(5)

	Sp1	Sp2	Sp3	Sp4
Z1				X
Z2		X		
Z3	X			
Z4			X	

b) Wenn man in der ersten Zeile (Z1) und der ersten Spalte (Sp1) das erste Kreuz setzt, muss man in der dritten Zeile (Z3) und in der vierten Spalte (Sp4) ein weiteres Kreuz setzen. Für die zweite und vierte Zeile (Z2 und Z4) bleiben dann zwei Möglichkeiten, um die Kreuze zu setzen. (Vgl. Lösung (1) und (2))
Wenn man in Z1Sp3 das erste Kreuz setzt, muss man in Z4Sp2 ein weiteres Kreuz setzen, in Z2Sp4 das dritte Kreuz und in Z3Sp1 das vierte Kreuz. Hier gibt es nur eine Möglichkeit. (Vgl. Lösung (3))
Wenn man in Z1Sp4 das erste Kreuz setzt, muss man in Z3Sp1 das zweite Kreuz setzen. Für Z2 und Z4 bleiben dann zwei Möglichkeiten, um die Kreuze zu setzen. (Vgl. Lösung (4) und (5))

Aufgabe 2 (Vom Planeten Horch)

Wenn der erste Horcher sieben Ohren gesehen haben, können die beiden anderen Horcher entweder drei und vier Ohren haben (3 + 4) oder zwei und fünf Ohren (2 + 5).

Da der zweite Horcher acht Ohren gesehen hat, können der erste und dritte Horcher vier und vier Ohren (4 + 4), drei und fünf Ohren (3 + 5) oder zwei und sechs Ohren (2 + 6) haben.

Hat der dritte Horcher fünf Ohren gesehen, haben der erste und zweite Horcher zwei und drei Ohren (2 + 3).

Überprüfung der Möglichkeiten (ausgehend von der Beobachtung von Horcher 1):

(1) Horcher 2 hat drei Ohren. Dann müsste Horcher 3 vier Ohren haben. Wenn Horcher 3 vier Ohren hat, dann muss auch Hocher 1 vier Ohren haben. Dann müsste Horcher 3 aber sieben Ohren sehen, diese Möglichkeit führt also zum Widerspruch.

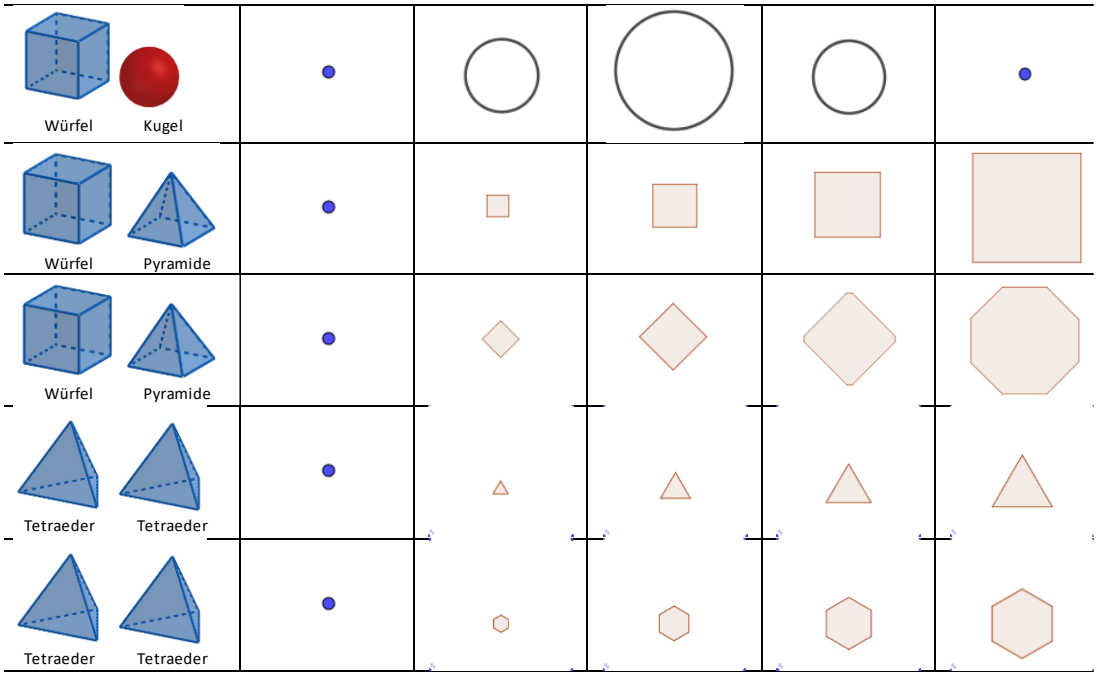
(2) Horcher 2 hat vier Ohren. Dann hat Horcher 3 drei Ohren. Horcher 1 müsste dann fünf Ohren haben. Dann müsste Horcher 3 aber neun Ohren sehen, diese Möglichkeit führt ebenfalls zum Widerspruch.

(3) Horcher 2 hat fünf Ohren. Dann hat Horcher 3 zwei Ohren. Horcher 1 müsste dann sechs Ohren haben.

(4) Dann müsste Horcher 3 aber elf Ohren sehen, diese Möglichkeit führt also auch zum Widerspruch.
Horcher 2 hat zwei Ohren. Dann hat Horcher 3 fünf Ohren. Horcher 1 müsste dann drei Ohren haben.
Hier stimmen alle Beobachtungen:
Hocher 1: drei Ohren; Horcher 2: zwei Ohren
=> Horcher 3 sieht fünf Ohren
Horcher 2: zwei Ohren; Horcher 3:fünf Ohren
=> Horcher 1 sieht sieben Ohren
Horcher 1: drei Ohren; Horcher 3: fünf Ohren
=> Horcher 2 sieht acht Ohren
Horcher 3 hat somit fünf Ohren.

Aufgabe 3 (Zauberei)

LÖSUNGEN



4.5 OMO 2022 – Ratsgymnasium Osnabrück

4.5.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Hell und schnell)
In einer Stunde brennt die längere Kerze $a\,cm$ ab, die kürzere $b\,cm$. Weil beide um 21.30 Uhr gleich lang sind, folgt daraus:

$$2a = 1{,}5\,b$$

(So lange brauchen sie jeweils, bis sie dann vollständig abgebrannt sind.)
Die kürzere Kerze brennt 4 Stunden, die längere 6 Stunden, sie unterscheiden sich um 3 cm. Also gilt:

$$6a = 4b + 3$$

Wenn man das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren löst, ergibt sich
$6a = 4b + 3$ und $6a = 4{,}5\,b$, also $b = 6$ und $a = 4{,}5$.
Damit sind die Kerzen 27 cm und 24 cm lang.

Aufgabe 2 (Ein besonderes Jahr)
Die Lösung gelingt mit einer Primfaktorzerlegung: $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, also $2020 = 1 \cdot 2020, 2 \cdot 1010, 4 \cdot 505, 5 \cdot 404, 10 \cdot 202, 20 \cdot 101$, usw.

x	-19	2000	-18	990	-16	485	-15	384	-10	182	0	81
y	-2000	19	-990	18	-485	16	-384	15	-182	10	-81	0

Aufgabe 3 (Ist das gerade?)
Die gleichseitigen Dreiecke ZLK und KRE besitzen je drei 60° -Winkel.

$\sphericalangle LKR = \sphericalangle ZKR - \sphericalangle ZKL = 90° - 60° = 30°$.

$\sphericalangle LKE = \sphericalangle LKR + \sphericalangle RKE = 30° + 60° = 90°$.

Das Dreieck KLE ist also rechtwinklig

Wegen $\overline{KL} = \overline{KE}$ ist das Dreieck KLE auch gleichschenklig.

Daraus folgt: $\sphericalangle ELK = 45°$.

Wir zeichnen die Strecke $\overline{LI}$ ein und betrachten Dreieck ZIL.

Auch dieses Dreieck ist gleichschenklig wegen $\overline{ZI} = \overline{ZL}$, besitzt daher gleich große Basiswinkel. Der Winkel an der Spitze beträgt: $\sphericalangle IZL = 30°$ (analog zu dem Dreieck LKR).

Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ZIL folgt:

$$\sphericalangle ZLI = (180° - 30°) : 2 = 75°$$

Insgesamt folgt:

$\sphericalangle ELI = \sphericalangle ELK + \sphericalangle KLZ + \sphericalangle ZLI = 45° + 60° + 75° = 180°$.

$\sphericalangle ELI$ ist ein gestreckter Winkel.

Also liegt der Punkt L auf der Geraden EI.

Aufgabe 4 (Zahlen im Dreieck)

a) Die letzte Zahl jeder Reihe ist die Summe aller Zahlen bis zur Ordnungszahl der Reihe, einfacher ausgedrückt:

Die letzte Zahl in der 5. Reihe ist $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

letzte Zahl Reihe 10: 55

letzte Zahl Reihe 30: 465

letzte Zahl Reihe n: $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$

b) Um die richtige Reihe zu finden, in der 800 stehen kann, überlegt man sich $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 800$, also $n \cdot (n+1) = 1600$.

Da $40 \cdot 40 = 1600$, muss man in dieser Größenordnung suchen. Es gilt: $\frac{39 \cdot 40}{2} = 780$, also ist 780 die letzte Zahl in der 39. Reihe, 781 die erste Zahl in Reihe 40. Schreibt man jetzt die Zahlen der beiden Reihen untereinander, steht 761 direkt über der 800.

Alternativ begründet man, dass die Zahlen der beiden Reihen jeweils den Abstand 39 voneinander haben.

4.5.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Höhe(n)punkt)

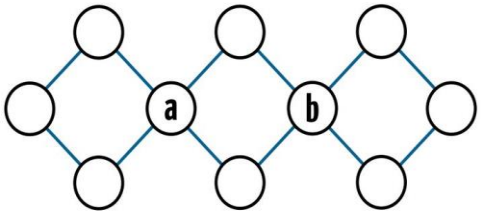
a) Der Flächeninhalt der grünen Fläche ist 9 cm², Seitenlängen der blauen Dreiecke sind einmal 3 und einmal 6 cm. Jetzt muss man die Grundseiten mit den dazugehörigen Höhen geschickt wählen: Links ist der Teil auf der Quadratseite die Grundseite, damit ist die Senkrechte, die durch den gemeinsamen Punkt auf der Hypotenuse des grünen Dreiecks geht, die Höhe.
Für das rechte Dreieck ist die Quadratseite die Grundseite und auch hier die Senkrechte, die durch den gemeinsamen Punkt geht, die Höhe. Da die beiden Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben müssen, gilt: $3cm \cdot h_1 = 6cm \cdot h_2$.
Beide Höhen zusammen ergeben 6 cm.
Daraus ergibt sich dann eine Höhe mit 4 cm und eine Höhe mit 2 cm. Dann kann man alle bekannten Flächen vom Flächeninhalt des Quadrates abziehen, erhält die Fläche für das gelbe Dreieck (15cm²) und kann die Höhe mit 5 cm berechnen.

b) Man kann die Hypotenuse des grünen Dreiecks als Gerade der Form $y = 0{,}5x + 0{,}5n$ auffassen.
Auf das Quadrat kann man ein Koordinatensystem legen.
Also muss P sowohl die Geradengleichung erfüllen als auch als Höhe des rechten Dreiecks so weit von der rechten Quadratseite liegen, dass das Dreieck einen Flächeninhalt von $\frac{3}{8} \cdot n^2$ hat (Quadrat hat n^2; grünes Dreieck $\frac{1}{4} \cdot n^2$, bleiben $\frac{3}{4} \cdot n^2$, das blaue Dreieck soll die Hälfte davon haben).
Damit muss die Höhe des gesuchten Dreiecks $\frac{3}{4} \cdot n$ sein und P liegt bei $(\frac{1}{4}\ n \mid \frac{5}{8}\ n)$ (eingesetzt in Geradengleichung oben).

Aufgabe 2 (Zahlen im Quadrat)

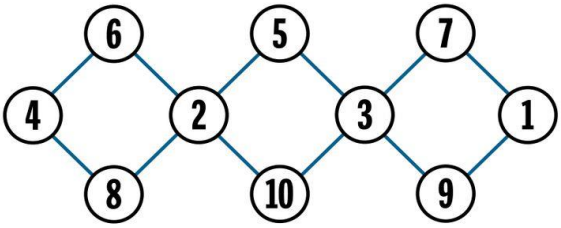
a) individuelle Schülerlösung

b) Die Zahlen von 1 bis 10 addiert ergibt 55.

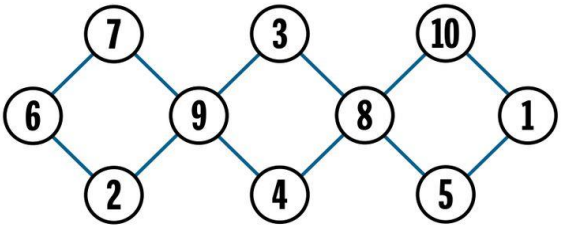


Die beiden inneren Kreise gehören zu je zwei Quadraten und werden daher noch einmal dazu addiert. Das heißt, es gilt für die Summe der Zahlen $55 + a + b$.
Damit ist der kleinstmögliche Wert für $55 + a + b = 58$, der größtmögliche Wert 74.
Die jeweils nächstliegenden durch 3 teilbaren Zahlen sind 60 und 72.
Damit ergibt sich für die kleinstmögliche Lösung $a + b = 5$, also $a = 1$ und $b = 4$ oder $a = 2$ und $b = 3$, die Summe jedes Quadrates ist 20.

Eine mögliche Lösung dafür ist



Für die größtmögliche Lösung ist $a + b = 17$, die Summe in den Quadraten beträgt 24.
Eine mögliche Lösung dafür ist



4.5.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (Panzerknacker)

a) 1145, 1415, 4115, 11225, 12125, 12215, 21125, 21215, 22115

b) Die Zahlen müssen am Ende eine Null oder eine 5 haben (siehe 1.); wegen des Produkts scheidet die Null aus.

Es kann nur eine 5 dabei sein (siehe 3.).

Also muss man 4·5 als Querprodukt haben. Einsen spielen beim Querprodukt keine Rolle, daher kann man zwei Einsen dazu multiplizieren, aber nicht mehr als zwei (siehe 2.). Daher können es nicht mehr als 5 Stellen sein.

Man kann die 4 durch zwei Zweien ersetzen, dann bleiben Quersumme und Querprodukt immer noch erfüllt.

Aufgabe 2 (Schachmatt)

a) Jeder gegen jeden heißt 6 Partien, die gespielt wurden.

b) Es sind insgesamt 17 Punkte verteilt worden. Da Jona 7 Punkte hat, muss er zweimal gewonnen haben und einmal unentschieden gespielt haben.
Lotte hat 4 Punkte, also einmal gewonnen, einmal unentschieden (viermal unentschieden wären zu viele Partien).
Die 3 Punkte für Herrn Müller und Felix sind entweder ein Sieg und 2 Niederlagen oder je 3 Unentschieden. Das passt dann aber mit den notwendigen Siegen bzw. Niederlagen aus den beiden vorigen Punkten nicht zusammen.
Insgesamt gilt also:

A ist falsch (es muss ein Unentschieden gegeben haben).
B ist korrekt.
C falsch (Man weiß nicht, wer gegen Lotte gewonnen hat).
D ist falsch (gegen Lotte).

E ist korrekt.

4.6 OMO 2023 – – Angelaschule Osnabrück

4.6.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Flagge)

a) $$\frac{4\cdot(12+21)+4\cdot 28}{28\cdot 37}=\frac{61}{259}\approx 0{,}2355\,.$$

b) $$\frac{4\cdot(12+x)+4\cdot 28}{28\cdot(16+x)}=0{,}25 \text{ ergibt } x=16$$

c) Für die Fläche des Streifens gilt: $A=x\cdot(3+4-x)=6.$
Diese quadratische Gleichung hat die Lösung $x_1 = 1$ und $x_2 = 6$, wobei x_2 im Sachzusammenhang ausscheidet.

d) Verallgemeinerung des Ansatzes in c):

$$x\cdot(a+b-x)=\frac{a\cdot b}{2}$$

$$\vdots$$

$$x=\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{a\cdot b}{2}}$$

$$x=\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4}-\frac{2\cdot a\cdot b}{4}}$$

$$x=\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$$

$$x=\frac{u}{4}\pm\sqrt{\frac{d^2}{4}}$$

$$x=\frac{u}{4}\pm\frac{d}{2}$$

Aufgabe 2 (Kryptogramm)

Um eine in a) geforderte Eintragung (siehe unten) zu finden, kann man mit Überlegungen zu Aufgabe b) beginnen, indem man folgende Schlüsse zieht: Wenn eine Eintragung allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, so folgt: Nach der Gleichung in der 1. Zeile hat die Summe aus der Einerziffer C der rechten Seite und der Einerziffer B wieder die Einerziffer C. Daher muss B = 0 sein. Danach folgt durch Betrachtung der Zehnerziffern weiter

$$C + D = 10.$$

Aus der 2. Spalte folgt K+H = 10 und dann weiter 2C +1 = D. Setzt man dies in C + D = 10 ein, so ergibt sich 3C + 1 = 10, also C = 3 und damit D = 7.
Hiernach ergibt sich aus der 3. Zeile K = 4 und damit H = 6 (wegen K + H = 10).
Aus der 3. Spalte folgt nun I = 5, E = 8 und damit aus der 1. Zeile A = 9 und aus der 1. Spalte F = 2, G = 1.
Als Eintragung, die zu a) anzugeben ist, wurde so

903	–	70	=	833
:		–		–
21	•	36	=	756
=		=		=
43	+	34	=	99

gefunden, und als Antwort zu b) hat sich ergeben, dass es keine anderen Möglichkeiten geben kann, die Bedingungen zu erfüllen. Zur vollständigen Bearbeitung der Aufgabe a) ist dann noch festzustellen, dass die gefundene Eintragung für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern verwendet und dass bei dieser Eintragung alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Daher erfüllt genau die angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen.

Aufgabe 3 (Herr Schulze)

Die Aussage über das Produkt der drei Altersangaben trifft genau für die folgenden Zusammenstellungen zu:

1. Kind	72	36	24	18	12	9	18	12	9	6	8	6
2. Kind	1	2	3	4	6	8	2	3	4	6	3	4
3. Kind	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
	74	39	28	23	19	18	22	17	15	14	14	13

Herr Lehmanns Aussage „Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln“ trifft hiernach genau dann zu, wenn die Hausnummer 14 beträgt, wie man der Tabelle entnehmen kann. Die nächste Aussage von Herrn Schulze trifft genau dann zu, wenn das 3. Kind um mindestens ein Jahr jünger ist als das 2. Kind. Daher trifft die abschließende Aussage von Herrn Lehmann genau dann zu, wenn die Altersangaben 6, 6 und 2 lauten.
Daher ist gezeigt: Es gibt eine Zusammenstellung der drei Altersangaben, für die alle Aussagen des Gesprächs zutreffen; es gibt auch nur eine solche Zusammenstellung; sie lautet 6, 6 und 2.

Aufgabe 4 (QK-Zahl)

a) Mögliche Summen mit $n = a^2 + b^3 \leqslant 100$ sind
- 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82 von der Form $a^2 + 1^3$,
- 9, 12, 17, 24, 33, 44, 57, 72, 89 von der Form $a^2 + 2^3$,
- 28, 31, 36, 43, 52, 63, 76, 91 von der Form $a^2 + 3^3$ und
- 65, 68, 73, 80, 89, 100 von der Form $a^2 + 4^3$.

Die Zahlen 17, 65 und 89 treten doppelt auf, sie können auf verschiedene Weise als Summe $a^2 + b^3$ dargestellt werden. Daher gibt es 29 QK-Zahlen im Bereich von 1 bis 100.

<u>Lösungsvariante</u>: Es gibt 9 Quadratzahlen im Intervall $1 \leqslant n < 100$ und 4 Kubikzahlen. Damit wären höchstens $9 \cdot 4 = 36$ QK-Zahlen möglich. Aufgrund von $a^2+b^3 \leqslant 100$ fallen vier Möglichkeiten weg: drei für $b^3 = 64$ und eine für $b^3 = 27$.
Wenn eine Zahl n mindestens zwei Darstellungen $n = a_1^2 + b_1^3$ und $n = a_2^2 + b_2^3$ hat, gilt $a_1^2 + b_1^3 = a_2^2 + b_2^3$, was zu $a_1^2 - a_2^2 = b_2^3 - b_1^3$ und $(a_1 - a_2) \cdot (a_1 + a_2) = b_2^3 - b_1^3$ führt.

Es gibt vier Fälle, je nachdem ob b_2 gleich 2, 3 oder 4 ist.
Fall 1: Aus $b_2 = 2$ folgt $a_1 = 4$, $a_2 = 3$ und $n = 17$.
Fall 2: $b_2 = 3$ hat keine Lösungen.
Fall 3: $b_2 = 4$ mit $b_1 = 1$ hat eine Lösung $a_1 = 8$, $a_2 = 1$ und $n = 65$.
Aus $b_1 = 2$ folgt $a_1 = 9$, $a_2 = 5$ und $n = 89$
$b_1 = 3$ hat keine Lösungen.

b) Die Anzahl der Quadratzahlen im Intervall $1 \leqslant n \leqslant N$ ist höchstens gleich $\sqrt{N}$ und Anzahl der Kubikzahlen $\sqrt[3]{N}$

Die Anzahl der QK-Zahlen kann daher durch $\sqrt{N} \cdot \sqrt[3]{N}$ nach oben abgeschätzt werden.
Im Intervall $1 \leqslant n \leqslant 1\,000\,000 = 10^6$ gibt es also höchstens $\sqrt{10^6} \cdot \sqrt[3]{10^6} = 10^5$ QK-Zahlen.
Damit sind unter den 10^6 Zahlen des Intervalls mindestens $9 \cdot 10^5$ Nicht-QK-Zahlen. Im Intervall $1 \leqslant n \leqslant 10^6$ gibt es also deutlich mehr Nicht-QK-Zahlen als QK-Zahlen.

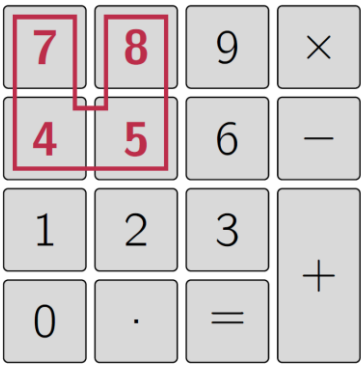
4.6.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Die Sache mit dem „U“)

a) Für einen richtig gehaltenen Taschenrechner gilt:
Alle möglichen Zahlen des kleinen „u“ sind 7458, 8569, 4125 und 5236. Alle möglichen Zahlen des großen „U“ sind 7128 und 8239.

b) Hier ist es möglich, eine der genannten Zahlen exemplarisch mit schriftlicher Division durch 11 vorzurechnen oder eine geeignete Multiplikationsaufgabe mit 11 anzugeben, bei der eine der oben angegebenen Zahlen das Ergebnis ist.

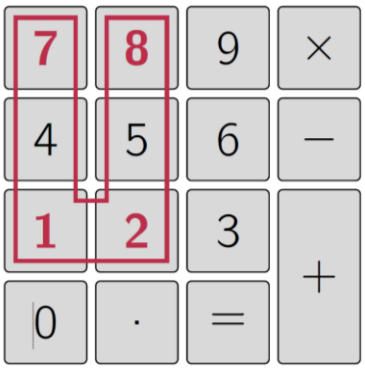
c) Das kleine „u“ des aufrechten Taschenrechners



Es sei a die kleinste Zahl des „u“, also die Zahl links unten. Mit Hilfe der Variablen a erhält man für jedes beliebige „u“ die Zahl

$a \cdot 100 + (a + 3) \cdot 1000 +$
$(a + 1) \cdot 10 + (a + 1 + 3) \cdot 1$
$= 1111a + 3 \cdot 1001 + 11$
$= 11 \cdot (101a + 3 \cdot 91 + 1)$,
was die Teilbarkeit durch 11 zeigt.

Das große „U“ des aufrechten Taschenrechners



Sei wieder a die kleinste Zahl, also die Zahl links unten. Für jedes große „U“ gilt:

$a \cdot 100 + (a + 6) \cdot 1000 +$
$(a + 1) \cdot 10 + (a + 1 + 6) \cdot 1$
$= 1111a + 6 \cdot 1001 + 11$
$= 11 \cdot (101a + 6 \cdot 91 + 1)$,
was die Teilbarkeit durch 11 zeigt.

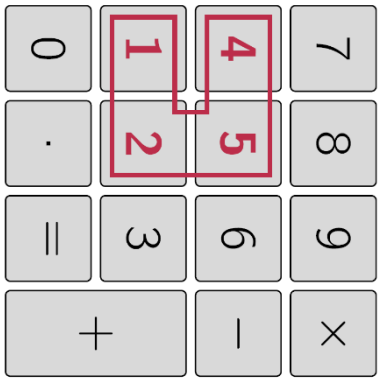
d) Der Taschenrechner wird um 180° gedreht

Wenn man die Zahl in der linken, unteren Ecke wieder mit a bezeichnet, dann erhält man, weil sie nun die größte Zahl ist, wieder dieselbe Vorgehensweise wie beim aufrechten Taschenrechner, nur dass man Subtraktionen anstelle von Additionen findet:

Mit Hilfe der Variablen a erhält man für jedes beliebige „u“ die Zahl

$a \cdot 100 + (a - 3) \cdot 1000 + (a - 1) \cdot 10 + (a - 1 - 3) \cdot 1$
$= 1111a - 3 \cdot 1001 - 11$
$= 11 \cdot (101a - 3 \cdot 91 - 1)$.

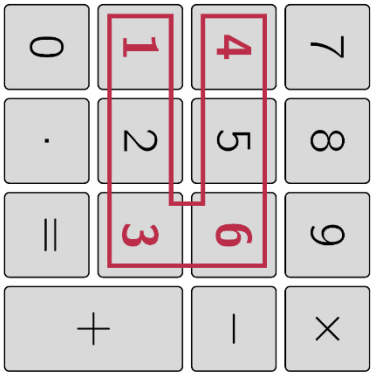
Das kleine „u“ des um 90° gedrehten Taschenrechners



Die Variable a sei wieder die kleinste Zahl, was diesmal die Ziffer links oben ist. Für das kleine „u“ gilt:

$a \cdot 1000 + (a + 1) \cdot 100 +$
$\quad (a + 1 + 3) \cdot 10 + (a + 3) \cdot 1$
$= 1111a + 110 + 3 \cdot 11$
$= 11 \cdot (101a + 10 + 3 \cdot 1)$,
was die Teilbarkeit durch 11 zeigt.

Das große „U“ des um 90° gedrehten Taschenrechners



Die Variable a sei wieder die kleinste Zahl, was diesmal die Ziffer links oben ist. Für das große „U“ gilt:

$a \cdot 1000 + (a + 2) \cdot 100 +$
$\quad (a + 2 + 3) \cdot 10 + (a + 3) \cdot 1$
$= 1111a + 2 \cdot 110 + 3 \cdot 11$
$= 11 \cdot (101a + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1)$,
was die Teilbarkeit durch 11 zeigt.

Dreht man den Taschenrechner nicht nach rechts, sondern nach links, dann erhält man dieselbe Argumentation wie oben: Durch die entgegengesetzte Drehung wird die Addition in eine Subtraktion verwandelt, was nichts an der Teilbarkeit ändert.

Aufgabe 2 – Operationen am Dreieck

a) Da bei Spiegelung jeder Punkt der Geraden, an der gespiegelt wird, fest bleibt und jedes Dreieck in ein kongruentes Dreieck übergeht, gilt $\triangle ACE \cong \triangle ACD$ und $\triangle BCF \cong \triangle BCD$ (siehe Abbildung (a)).

Daher ist der Flächeninhalt von ABFCE doppelt so groß wie der von ABC. Dieser beträgt nach Voraussetzung $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 14$ cm², also hat ABFCE den Flächeninhalt 28 cm².
Ferner folgt $\overline{AE} = \overline{AD}$ und $\overline{BF} = \overline{BD}$, also $\overline{AE} + \overline{BF} = \overline{AB}$, sowie $\overline{CE} = \overline{CF} = \overline{CD}$. Damit ergibt sich für den Umfang von ABFCE der Wert $2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{CD} = 22$ cm.

b) Mit den Bezeichnungen ∠BAC = α und ∠ABC = β gilt nach dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ADC und BDC sowie wegen der Spiegelungen ∠ACE = ∠ACD = 90° − α und ∠BCF = ∠BCD = 90° – β.
Für ∠ACB = γ gilt wegen der Voraussetzung ∠ECF = 180° (siehe Abbildung (b)) daher
90° − α + γ + 90° – β = 180°.
Wegen 180° − α – β = γ (Innenwinkelsatz für das Dreieck ABC) folgt 2γ = 180° , also γ = 90°

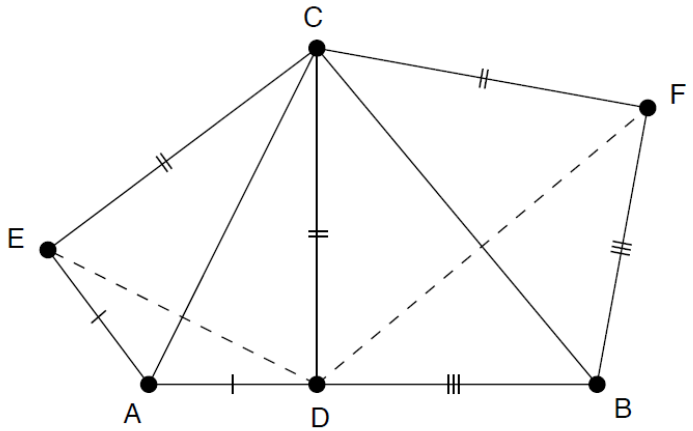


Abb. (a)

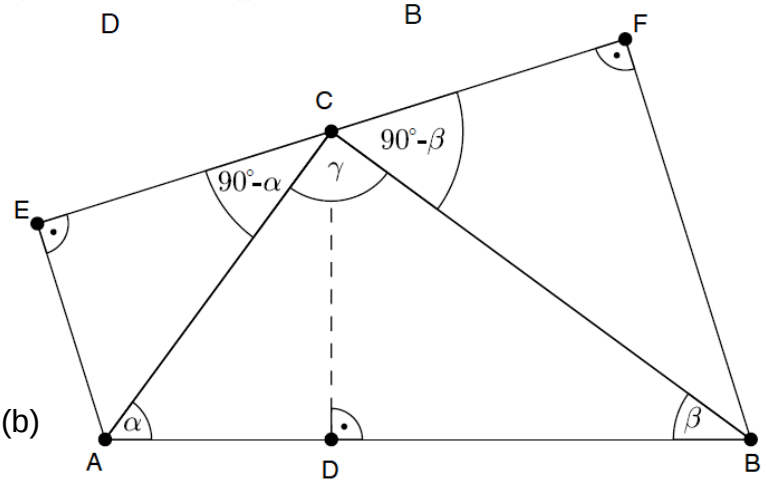


Abb. (b)

4.6.3 Klassenstufen 5 bis 6

Aufgabe 1 (Türme von Hanoi)

a) Es werden folgende 15 Züge benötigt:
AB, AC, BC, AB, CA, CB, AB, AC, BC, BA, CA, BC, AB, AC, BC

b)

Anzahl Ringe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl Züge	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

c) Für n Ringe gilt eine benötigte Zuganzahl von $2^n - 1$.
Es sind 10 Ringe [siehe b)].

d) Beim Umlegen der einzelnen Ringe liegen stets nur benachbarte Größen übereinander. Daher erhöht sich die Anzahl der mindestens benötigten Züge bei Oles Regel nicht.

Aufgabe 2 (Geobrett)

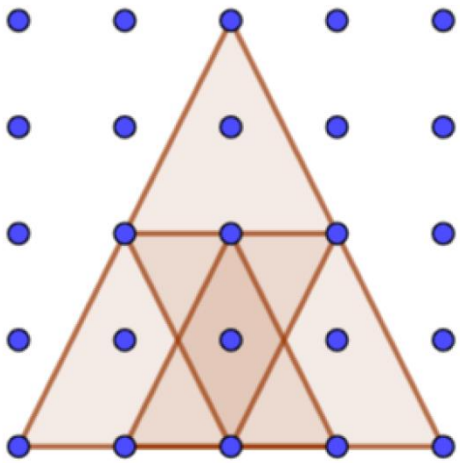


Bild zu a)

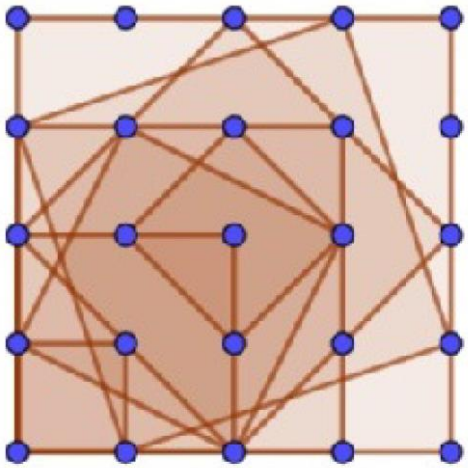


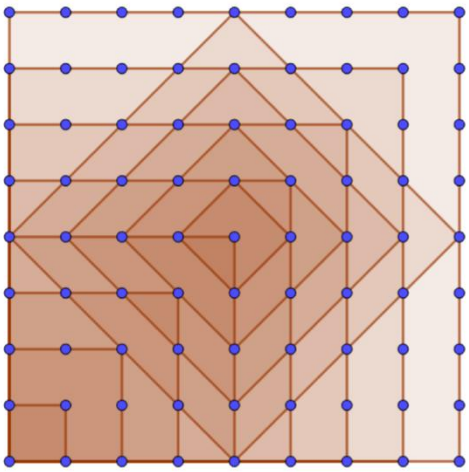
Bild zu b)

a) Insgesamt enthält die Figur 10 Dreiecke.

b) Es sind 8 verschieden große Quadrate.
Die Flächeninhalte betragen in cm^2: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16.

c) Bei einem 9x9 Geobrett gibt es 12 derartige Quadrate (8 mit senkrechten und waagerechten Seiten und 4 mit diagonalen Seiten).

Bei einem 100x100 Geobrett sind es 148 verschieden große Quadrate (99 mit senkrechten und waagerechten Seiten und 49 mit diagonalen Seiten).



Bei einem NxN Geobrett sind es N + $\lceil \frac{N}{2} \rceil - 2$ verschieden große Quadrate (N − 1 mit senkrechten und waagerechten Seiten und $\lceil \frac{N}{2} \rceil - 1$ mit diagonalen Seiten).

Hinweis: Die Darstellung ⌈ ⌉ bedeutet, dass die Zahl im Inneren immer aufgerundet wird. Beispiel: ⌈3,2⌉ = 4.

Aufgabe 3 (Logical)

	Farbe	Ei	Hobby	Versteck
Ella			Basteln	
Emilio	gelb (laut 2)		TV (laut 2)	Brotkasten
Franzi		Joghurt	Kreuzwort	
Marie			E-Mail	
Tom	rot			

Marie, Ella und Tom:
Marzipan – Kleiderschrank (laut 9)
Marie und Ella:
Trüffel – blau (laut 10)

Annahme: Marie blau – Trüffel

- Ella Marzipan – Kleiderschrank
- Franzi orange
- Ella grün

⇒ Ella: blau – Trüffel

	Farbe	Ei	Hobby	Versteck
Ella	blau	Trüffel	Basteln	
Emilio	gelb (laut 2)		TV (laut 2)	Brotkasten
Franzi		Joghurt	Kreuzwort	
Marie			E-Mail	
Tom	rot		Buch (laut 7)	Wäschebeutel (laut 7)

	Farbe	Ei	Hobby	Versteck
Ella	blau	Trüffel	Basteln	
Emilio	gelb (laut 2)	Mokka (laut 5)	TV (laut 2)	Brotkasten
Franzi		Joghurt	Kreuzwort	
Marie		Marzipan (laut 9)	E-Mail	Kleiderschrank (laut 9)
Tom	rot	Nougat	Buch (laut 7)	Wäschebeutel (laut 7)

	Farbe	Ei	Hobby	Versteck
Ella	blau	Trüffel	Basteln	Bett
Emilio	gelb (laut 2)	Mokka (laut 5)	TV (laut 2)	Brotkasten
Franzi	orange (laut 1)	Joghurt	Kreuzwort	Sporttasche (laut 1)
Marie	grün	Marzipan (laut 9)	E-Mail	Kleiderschrank (laut 9)
Tom	rot	Nougat	Buch (laut 7)	Wäschebeutel (laut 7)

Das Nougat-Ei bekommt also Tom und bei Ella war ein Ei im Bett versteckt.

Index

Dreiecksberechnung .. 39, 46, 48, 52, 61, 93, 106, 110, 111, 122
Flächenberechnung ... 26, 53, 57, 73, 113, 117
Flächenteilung 20, 68
Geschwindigkeitsberechnung51, 111
Kombinatorik .. 18, 33, 47, 61, 65, 82, 108, 124
Kreisberechnung ... 35, 38, 87, 91
Kreisflächenberechnung... 19, 67
Kryptogramm 57, 118
Logelei ..27, 29, 34, 36, 47, 55, 58, 64, 77, 79, 84, 88, 109, 115, 118, 125
Parkettierung 21, 44, 62, 70, 104, 124
Primfaktorenzerlegung 51, 111
Primzahlen 35, 86
Primzahlzwillinge 20, 69
Quadratzahlen 35, 85
Quersummen 25, 72
Spielstrategie 21, 45, 69, 106
Summation 19, 54, 66, 113
Teilbarkeit ..18, 27, 40, 43, 54, 59, 65, 76, 96, 102, 115, 120
Wahrscheinlichkeitsrechnung30, 37, 45, 79, 90, 105
Wiegeproblem 43, 101
Zahlenfolgen....23, 32, 52, 71, 81, 112
Zahlentheorie 42, 59, 99, 119